

**И. В. Петрусенко<sup>1</sup>, Ю. К. Сиренко<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup>Университет таможенного дела и финансов  
8, ул. Рогалева, Днепрпетровск, 49000, Украина  
E-mail: [petrusigor@yahoo.com](mailto:petrusigor@yahoo.com)

<sup>2</sup>Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины  
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

<sup>3</sup>Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева  
2, ул. Мирзояна, Астана, 010000, Республика Казахстан  
E-mail: [yks@bk.ru](mailto:yks@bk.ru)

## ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СШИВАНИЯ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛНОВОДНЫХ МОД. ЧАСТЬ 4. СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В данной части работы продолжено изложение основ разработанного обобщения метода сшивания для анализа рассеяния волноводных мод. Рассматривается задача аналитической оценки скорости сходимости проекционных приближений к операторным формулам Френеля, безусловная сходимость которых была доказана ранее. На примере канонической скалярной задачи дифракции волн на ступеньке в прямоугольном волноводе дан вывод погрешности приближений операторов отражения и прохождения волн. Показано, что поставленную задачу решает рассмотрение сильной  $P$ -сходимости проекционного представления амплитудного оператора рассеяния. В результате впервые найдена аналитическая оценка скорости сходимости приближений операторов рассеяния, полученных методом редукции операторных формул Френеля. Правильность найденных закономерностей подтверждена численным расчетом. Полученные результаты позволяют определить вычислительную эффективность обобщенного метода сшивания. Ил. 1. Библиогр.: 6 назв.

**Ключевые слова:** метод сшивания, операторные формулы Френеля, скорость сходимости приближений.

В предыдущих трех частях работы [1–3] на основе новой формулировки задачи дифракции волноводных мод была развита теория обобщенного метода сшивания. Новый подход позволил:

- строго доказать существование, единственность и устойчивость решений матрично-операторных уравнений метода сшивания для двух классов задач электродинамического анализа;
- выяснить, что корректность матричной модели является прямым следствием закона сохранения энергии;
- доказать безусловную сходимость проекционных приближений метода редукции к истинным операторам рассеяния;
- аналитически оценить число обусловленности бесконечной и редуцированной матриц итоговой модели.

В данной части работы рассматривается практически важная задача оценивания *a priori* количественных параметров сходимости приближений метода редукции, которая была трудноразрешимой в рамках стандартного варианта метода сшивания. Используя технику матричных операторов, мы выводим аналитическую оценку скорости сходимости приближений для операторов отражения  $\mathbf{R}$  и прохождения волн  $\mathbf{T}$  на примере той же канонической скалярной задачи дифракции мод типа  $\{LM_{m0}\}_{m=1}^{\infty}$  и  $\{LE_{m1}\}_{m=0}^{\infty}$  на скачке поперечного сечения прямоугольного волновода, которая была ранее рассмотрена в статье [1].

При выводе этой оценки мы будем использовать основные понятия, терминологию и

обозначения предыдущих частей работы [1–3], а также следующее определение порядка аппроксимации матричного оператора (см., например, [4]). Для заданной бесконечно малой числовой последовательности  $\{\alpha_N = N^{-\nu}\}_{N=1}^{\infty}$ ,  $\nu > 0$ , последовательность проекционных приближений  $\{\hat{\mathbf{R}}\}$

$P$ -сходится к матричному оператору  $\mathbf{R}: \ell_2 \rightarrow \ell_2$  со скоростью  $\alpha_N$ , если

$$\|\mathbf{b}(\mathbf{PRP} - \hat{\mathbf{R}})\|_h \leq \text{const} \cdot \alpha_N \quad (1)$$

при этом порядок аппроксимации оператора  $\mathbf{R}$  на векторе  $\mathbf{b}$  равен  $\nu$ . В неравенстве (1)  $\mathbf{P}$  есть заданный ортопроектор, а норма вычисляется в пространстве  $h \equiv \mathbf{P}\ell_2$ .

В данном исследовании возникают такие приближения матричного оператора, которые содержат сопряженные ортопроекторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$  ( $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = \mathbf{0}$ ), перемежающие в некотором порядке составные части этого оператора. Это обобщение обычной редукции матричного оператора будем полагать проекционным представлением данного оператора даже тогда, когда такому приближению трудно придать прямой физический смысл.

**Погрешность проекционных приближений операторов рассеяния.** Для класса задач дифракции мод на скачкообразной неоднородности в волноводе матричная модель обобщенного метода сшивания имеет вид формул Френеля для операторов рассеяния [1]. В случае рассмат-

риваемой задачи о ступеньке в волноводе эти формулы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_p = \frac{\mathbf{D}_p - \mathbf{I}}{\mathbf{D}_p + \mathbf{I}}, & \mathbf{D}_p = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_0^T \\ \mathbf{D}_0^T \mathbf{D}_0 \end{Bmatrix}, \\ {}^{pq} \mathbf{T} = (\mathbf{D}_p + \mathbf{I})^{-1} 2 \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{D}_0^T \end{Bmatrix}, & p + q = 3, \end{cases} \quad p = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{R}_p$  есть (с точностью до знака) оператор отражения в  $p$ -м плече,  ${}^{pq} \mathbf{T}$  суть оператор прохождения волн из  $p$ -го плеча в  $q$ -е плечо, а базовый оператор задачи  $\mathbf{D}_0$  определен скалярным произведением поперечных собственных функций двух частичных областей и постоянными распространения волноводных мод [1].

Для наших целей имеет смысл записать формулы (2) в обозначениях пары «амплитудных операторов рассеяния»

$$\begin{cases} \mathbf{A}_p = (\mathbf{D}_p + \mathbf{I})^{-1}, \\ \mathbf{B}_p = \frac{\mathbf{D}_p}{\mathbf{D}_p + \mathbf{I}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{B}_p + \mathbf{A}_p = \mathbf{I}, \\ \mathbf{B}_p - \mathbf{A}_p = \mathbf{R}_p, \end{cases} \quad (3)$$

в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_p = \mathbf{I} - 2\mathbf{A}_p = 2\mathbf{B}_p - \mathbf{I}, \\ {}^{pq} \mathbf{T} = 2\mathbf{A}_p \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{D}_0^T \end{Bmatrix}, \end{cases} \quad p = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Из свойства акретивности оператора задачи  $\operatorname{Re} \mathbf{D}_p > 0$  вытекает, что амплитудные операторы рассеяния (3) являются акретивными сжатиями,  $\operatorname{Re} \mathbf{A}_p > \mathbf{A}_p \mathbf{A}_p^\dagger > 0$ ,  $\operatorname{Re} \mathbf{B}_p > \mathbf{B}_p \mathbf{B}_p^\dagger > 0$  [1].

Для построения проекционных приближений к операторам рассеяния (4) используем бесконечномерные ортопроекторы [2]

$$\mathbf{P}_K \equiv \left\{ P_{mn}^{(K)} = \sum_{p=(0)1}^K \delta_{mp} \delta_{pn} \right\}, \quad \mathbf{Q}_K \equiv \mathbf{I} - \mathbf{P}_K, \quad (5)$$

где  $K = M, N$  означает число учитываемых мод в двух полубесконечных волноводах, а  $\delta_{mn}$  есть символ Кронекера. Ниже полагаем, что поле в  $p$ -м волноводе,  $p = 1, 2$ , редуцировано к сумме  $M$  мод, тогда как  $N$  мод учитывается в смежной области.

Рассматриваемые проекционные приближения

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{R}}_p = \mathbf{P}_M - 2\widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{P}_M = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{R}}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ {}^{pq} \widehat{\mathbf{T}} = 2\widehat{\mathbf{A}}_p \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}_0 \\ \widehat{\mathbf{D}}_0^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{pq} \widetilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad p = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

представляют собой расширения конечномерных приближений  $\widetilde{\mathbf{R}}_p$  и  ${}^{pq} \widetilde{\mathbf{T}}$  [2] до бесконечномерных матриц с помощью нулей (как это символически показано в выражениях (6) с помощью блочных матриц). Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}_p &= (\widehat{\mathbf{D}}_p + \mathbf{I})^{-1}, \quad \widehat{\mathbf{A}}_p \widehat{\mathbf{A}}_p^{-1} = \widehat{\mathbf{A}}_p^{-1} \widehat{\mathbf{A}}_p = \mathbf{I}, \\ \widehat{\mathbf{D}}_p &= \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}_0 \widehat{\mathbf{D}}_0^T, \\ \widehat{\mathbf{D}}_0^T \widehat{\mathbf{D}}_0, \end{Bmatrix} \quad \widehat{\mathbf{D}}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_M \\ \mathbf{P}_N \end{Bmatrix} \mathbf{D}_0 \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_N \\ \mathbf{P}_M \end{Bmatrix}, \quad p = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

В работе [2] было найдено, что сильная  $P$ -сходимость проекционных приближений (6) к истинным операторам рассеяния (4) определена сильной  $P$ -сходимостью разности известных операторов  $\mathbf{P}_M \mathbf{D}_p - \widehat{\mathbf{D}}_p = \Lambda_{M,N}^{(p)}$  к нулевому оператору. Для рассматриваемой задачи эту разность можно представить в виде

$$\Lambda_{M,N}^{(p)} = \mathbf{P}_M \mathbf{D}_p \mathbf{Q}_M + \mathbf{P}_M \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{D}_0^T \end{Bmatrix} \mathbf{Q}_N \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0^T \\ \mathbf{D}_0 \end{Bmatrix} \mathbf{P}_M. \quad (8)$$

Для целей исследования  $P$ -сходимости операторов рассеяния образуем разности

$$\mathbf{P}_M \mathbf{R}_p \mathbf{P}_M - \widehat{\mathbf{R}}_p = 2\widehat{\mathbf{A}}_p \Lambda_{M,N}^{(p)} \mathbf{A}_p \mathbf{P}_M; \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_M {}^{pq} \mathbf{T} \mathbf{P}_N - {}^{pq} \widehat{\mathbf{T}} = -\widehat{\mathbf{A}}_p \Lambda_{M,N}^{(p)} {}^{pq} \mathbf{T} \mathbf{P}_N. \quad (10)$$

Тогда с учетом свойств  $\|\mathbf{A}_p\| < 1$ ,  $\|{}^{pq} \mathbf{T}\| < \sqrt{2}$  [5] из равенств (9) и (10) получаем оценку

$$\left\{ \begin{aligned} &\|\mathbf{b}(\mathbf{P}_M \mathbf{R}_p \mathbf{P}_M - \widehat{\mathbf{R}}_p)\| \\ &\|\mathbf{b}(\mathbf{P}_M {}^{pq} \mathbf{T} \mathbf{P}_N - {}^{pq} \widehat{\mathbf{T}})\| \end{aligned} \right\} < \|\mathbf{a}_1 \mathbf{Q}_M\| + \|\mathbf{a}_2 \mathbf{Q}_N\|, \quad (11)$$

где  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \ell_2$  при  $\forall \mathbf{b} \in \ell_2$  [2].

Итак, сильная  $P$ -сходимость проекционных приближений (6) при любых значениях отношения  $M/N$  является следствием сильной сходимости ортопроектора  $\mathbf{Q}_K$ ,  $K = M, N$ , к нулевому оператору в пространстве  $\ell_2$ . Наличие двух слагаемых в выражении (11) означает необходимость одновременного и независимого выполнения условий  $M \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$  предельного перехода.

Далее будет показано, что скорость сходимости приближений (6) можно оценить, используя свойства оператора

$$\Upsilon_{M,N}^{(p)} = 2\mathbf{B}_p \mathbf{Q}_M + {}^{pq} \mathbf{T} \mathbf{Q}_N \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_0^T \\ \mathbf{D}_0 \end{Bmatrix} \mathbf{P}_M, \quad (12)$$

который также запишем в эквивалентной форме

$$\mathbf{Y}_{M,N}^{(p)} = {}^{pq}\mathbf{T} \left[ \begin{array}{c} \left\{ \mathbf{D}_0^T \right\} \\ \left\{ \mathbf{D}_0 \right\} \end{array} \right] - \mathbf{P}_N \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \mathbf{D}_0^T \right\} \\ \left\{ \mathbf{D}_0 \right\} \end{array} \right\} \mathbf{P}_M. \quad (13)$$

Из последнего выражения ясно, что этот оператор суть проекционное представление амплитудного оператора  $2\mathbf{B}_p$ ,  $\|\mathbf{B}_p\| < 1$ .

Из разложения оператора  $\mathbf{Y}_{M,N}^{(p)}$  по сопряженным ортопроекторам (12) следует, что для произвольного вектора  $\mathbf{b} \in \ell_2$  справедлива теорема Пифагора

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}\mathbf{Y}_{M,N}^{(p)}\|^2 &= \|2\mathbf{b}\mathbf{B}_p\mathbf{Q}_M\|^2 + \\ &+ \left\| \mathbf{b} {}^{pq}\mathbf{T}\mathbf{Q}_N \begin{array}{c} \left\{ \mathbf{D}_0^T \right\} \\ \left\{ \mathbf{D}_0 \right\} \end{array} \mathbf{P}_M \right\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть вектор источника поля  $\mathbf{b}$  таков, что  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}\mathbf{B}_p\mathbf{Q}_M$  и  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{b} {}^{pq}\mathbf{T}\mathbf{Q}_N$ ,  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \ell_2$ , суть векторы коэффициентов разложения поля в апертуре рассматриваемой неоднородности. Степенной закон убывания этих коэффициентов при больших значениях индекса известен [6], он определяется геометрией острого ребра ступеньки и не зависит от рассеиваемой волны. В нашем случае идеально проводящего (металлического) прямоугольного клина имеем:

$$d_m^{(1)}, d_m^{(2)} = O(m^{-7/6}), m \gg 1.$$

Теперь, воспользовавшись асимптотической оценкой для остатка ряда

$$\sum_{m=K+1}^{\infty} \left( \frac{\text{const}}{m^{7/6}} \right)^2 = \frac{\text{const}_0^2}{K^{4/3}} [1 + O(K^{-1})], K \gg 1, \quad (15)$$

равенство (14) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}\mathbf{Y}_{M,N}^{(p)}\|^2 &= \frac{\text{const}_2^2}{M^{4/3}} + \frac{\text{const}_2^2}{N^{4/3}} + \\ &+ O(M^{-7/6}) + O(N^{-7/6}), \end{aligned} \quad (16)$$

и, значит,  $\lim_{M,N \rightarrow \infty} \|\mathbf{b}\mathbf{Y}_{M,N}^{(p)}\| = 0, \forall \mathbf{b} \in \ell_2$ .

**Лемма.** Справедливо тождество

$$2\widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{\Lambda}_{M,N}^{(p)} = \mathbf{P}_M \mathbf{Y}_{M,N}^{(p)} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{Y}_{M,N}^{(p)} \right)^{-1}. \quad (17)$$

*Доказательство.* Используя выражение (8), находим

$$\begin{aligned} 2\widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{\Lambda}_{M,N}^{(p)} &= (\mathbf{P}_M + \widehat{\mathbf{R}}'_p) \mathbf{Q}_M + \\ &+ {}^{pq}\widehat{\mathbf{T}}' \mathbf{Q}_N \begin{array}{c} \left\{ \mathbf{D}_0^T \right\} \\ \left\{ \mathbf{D}_0 \right\} \end{array} \mathbf{P}_M, \quad p = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь мы ввели новые проекционные представления операторов рассеяния по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_M + \widehat{\mathbf{R}}'_p &= 2\widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{P}_M \mathbf{D}_p, \\ {}^{pq}\widehat{\mathbf{T}}' &= 2\widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{P}_M \begin{array}{c} \left\{ \mathbf{D}_0 \right\} \\ \left\{ \mathbf{D}_0^T \right\} \end{array}, \quad p = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее заметим, что аппроксимации  $\widehat{\mathbf{R}}'_p$  и  ${}^{pq}\widehat{\mathbf{T}}'$  сильно  $P$ -сходятся к соответствующим истинным операторам рассеяния. Действительно, разности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_M \mathbf{R}_p - \widehat{\mathbf{R}}'_p &= -2\widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{\Lambda}_{M,N}^{(p)} \mathbf{B}_p, \\ \mathbf{P}_M {}^{pq}\mathbf{T} - {}^{pq}\widehat{\mathbf{T}}' &= -\widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{\Lambda}_{M,N}^{(p)} {}^{pq}\mathbf{T} \end{aligned} \quad (20)$$

вполне аналогичны равенствам (9), (10) и, значит, для них справедливы оценки типа (11). Выделяя эти новые проекционные представления операторов рассеяния из соотношений (20) и исключая их из равенства (18), приходим к тождеству

$$2\widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{\Lambda}_{M,N}^{(p)} = (\mathbf{P}_M + \widehat{\mathbf{A}}_p \mathbf{\Lambda}_{M,N}^{(p)}) \mathbf{Y}_{M,N}^{(p)}, \quad (21)$$

которое также может быть записано в виде (17).

**Теорема.** Проекционные приближения (6) сильно  $P$ -сходятся к истинным операторам рассеяния (4) со скоростью  $M^{-2/3}, N^{-2/3}$  при  $M, N \gg 1$  для всех векторов источника поля  $\mathbf{b} \in \ell_2$ .

*Доказательство.* Подставляя тождество (17) в равенство (9), находим оценку

$$\|\mathbf{b}(\mathbf{P}_M \mathbf{R}_p \mathbf{P}_M - \widehat{\mathbf{R}}'_p)\| < \|\mathbf{b}\mathbf{P}_M \mathbf{Y}_{M,N}^{(p)}\| \left\| \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{Y}_{M,N}^{(p)} \right)^{-1} \right\|.$$

Второй множитель в правой части этого выражения является величиной ограниченной; его зависимость от величин  $M$  и  $N$  можно пренебречь. Далее, для любого конечномерного вектора  $\mathbf{b}\mathbf{P}_M, \mathbf{b} \in \ell_2$ , мы можем воспользоваться результатом (16). Тогда при условии  $M, N \gg 1$  получаем неравенство

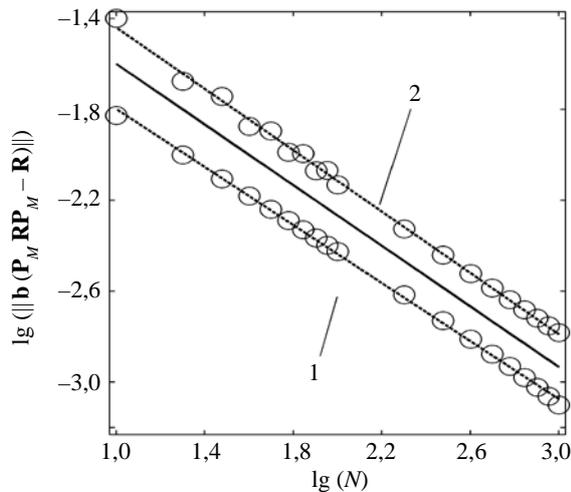
$$\|\mathbf{b}(\mathbf{P}_M \mathbf{R}_p \mathbf{P}_M - \widehat{\mathbf{R}}'_p)\| \leq \begin{cases} \frac{|\text{const}_3|}{M^{2/3}} \sqrt{1 + \text{const}_4^2 \left( \frac{M}{N} \right)^{4/3}}, \\ \frac{|\text{const}_5|}{N^{2/3}} \sqrt{1 + \text{const}_6^2 \left( \frac{N}{M} \right)^{4/3}}. \end{cases}$$

Итак, порядок аппроксимации оператора отражения равен  $\nu = 2/3$ . При том же допущении точно такая же оценка скорости сходимости приближений следует из выражения (10) для оператора прохождения волн  ${}^{pq}\mathbf{T}$ .

Ниже на рисунке показаны типичные результаты компьютерной верификации полученной аналитической оценки порядка аппроксимации оператора отражения  $\mathbf{R}_1$  для задачи о ступеньке в  $H$ -плоскости. Численные данные представлены таким образом, чтобы величина  $-\nu$  соответствовала угловому коэффициенту  $k$  уравнения прямой. Результаты вычислений соответ-

ствуют значениям  $a/\lambda = 1,3$ ,  $b/a = 0,5$ ,  $M/N = \{2; 1/2\}$  и заданному вектору источника поля  $\mathbf{b} = \{\delta_{1m}\}_{m=1}^{\infty}$ .

При проведении вычислений в качестве истинного оператора отражения  $\mathbf{R}_1$  принималась конечная  $M_0 \times M_0$  матрица, которая извлекалась из редуцированной модели (41) статьи [1] для значений  $M_0 = 4\,000$ ,  $N_0 = 2\,000$  ( $M_0/N_0 = a/b$ ). При этом величина числа обусловленности обращаемой блочной матрицы размером  $6\,000 \times 6\,000$  не превышала значения 1,75.



Закономерность убывания погрешности аппроксимаций оператора отражения при увеличении числа учитываемых мод волноводов: круги – расчет; пунктир – интерполяционная прямая; сплошная линия – аналитическая оценка

На рисунке видно, что при относительно небольших значениях величины  $N$  отклонения вычисленных значений от интерполяционной прямой несколько больше для прямой 2 ( $M/N = 1/2$ ), чем для прямой 1, которое отвечает правилу Миттры (прямая 1).

На рисунке прямая 1 имеет тангенс угла наклона  $k = -0,638$ , а для прямой 2  $k = -0,675$ .

Таким образом, для приведенных на рисунке графиков величина относительной погрешности предсказанного значения  $\nu = 2/3$  не превышает 4,5 %.

**Выводы.** На примере канонической задачи о ступеньке в прямоугольном волноводе впервые найдена аналитическая оценка скорости сильной  $P$ -сходимости приближений операторов рассеяния, полученных редуциацией операторных формул Френеля.

Как и следовало ожидать, скорость сходимости исследуемых проекционных приближений определяется степенью убывания коэффициентов  $\mathbf{d} = \{d_m\}$  модового разложения поля в апертуре волноводной неоднородности. Показа-

но, что для рассматриваемой задачи порядок аппроксимации операторов отражения  $\mathbf{R}$  и прохождения волн  $\mathbf{T}$  близок к величине  $\nu = 2/3$  при  $d_m = O(m^{-7/6})$ ,  $m \gg 1$ , для всех векторов источника поля  $\mathbf{b} \in \ell_2$ .

Рассмотренные операторные формулы Френеля носят универсальный характер для класса задач дифракции мод на скачкообразных неоднородностях в волноводе [1]. Поэтому предложенный метод исследования и полученные результаты будут полезны при строгом анализе таких неоднородностей.

### Библиографический список

1. Петрусенко И. В. Обобщенный метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. I. Формулы Френеля для операторов рассеяния / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электрон. – 2012. – 3(17), № 3. – С. 8–15.
2. Петрусенко И. В. Обобщенный метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. II. Сходимость проекционных приближений / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электрон. – 2012. – 3(17), № 4. – С. 18–21.
3. Петрусенко И. В. Обобщенный метод сшивания в теории дифракции волноводных мод. III. Рассеяние волн на резонирующих неоднородностях / И. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко // Радиофизика и электрон. – 2012. – 3(17), № 4. – С. 22–28.
4. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
5. Petrusenko I. V. Generalization of the power conservation law for scalar mode-diffraction problems / I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko // Telecommunications and Radio Engineering. – 2009. – 68, N 16. – P. 1399–1410.
6. Митт т па Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли; пер. с англ. под ред. Г. В. Воскресенского. – М.: Мир, 1974. – 327 с.

Рукопись поступила 19.05.2015.

I. V. Petrusenko, Yu. K. Sirenko

### GENERALIZED MODE-MATCHING TECHNIQUE IN THE THEORY OF MODE DIFFRACTION.

#### PART 4. RATE OF CONVERGENCE FOR PROJECTIVE APPROXIMATIONS

In this part of the work, we continue consideration about the basics of the generalized mode-matching technique, which has recently been developed for the analysis of wave diffraction. The problem of analytical estimate of the rate of convergence of projection approximations to the operator Fresnel formulae is discussed. The unconditional strong convergence of these approximations to the true scattering operators was proved previously. For the canonical scalar problem of wave diffraction on the step discontinuity in a guide a measure of inaccuracy for the approximations of scattering operators has been derived analytically. These projective approximations under consideration are the truncated Fresnel formulae for the reflection and transmission operators. It is shown that the problem can be solved by examination of strong  $P$ -convergence of projective representations of an amplitude scattering operator. An analytical estimate of the rate of convergence of approximations for the scattering operators under consideration has been obtained. The found order of approximations has been verified by numerical computation. The results

obtained allow us to estimate the computational efficiency of the generalized mode-matching technique, which can be useful for numerical-analytical solution of various electromagnetic problems.

**Key words:** mode-matching technique, operator Fresnel formulae, rate of convergence.

I. В. Петрусенко, Ю. К. Сиренко

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЗШИВАННЯ  
В ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ МОД ХВИЛЕВОДІВ.  
ЧАСТИНА 4. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ  
ПРОЕКЦІЙНИХ НАБЛИЖЕНЬ

У цій частині роботи продовжено викладення основ розробленого узагальнення методу шивання для аналізу розсіювання мод хвильоводів. Розглядається задача аналітичної

оцінки швидкості збіжності проєкційних наближень до операторних формул Френеля, безумовна збіжність яких була доведена раніше. На прикладі канонічної скалярної задачі дифракції хвиль на сходиці в прямокутному хвильоводі надано виведення похибки наближень операторів відбиття й проходження хвиль. Показано, що поставлена проблема вирішується через розгляд сильної  $P$ -збіжності проєкційного подання амплітудного оператора розсіювання. В результаті вперше знайдена аналітична оцінка швидкості збіжності наближень до операторів розсіювання, отриманих методом редукції операторних формул Френеля. Правильність знайдених закономірностей підтверджена числовим розрахунком. Отримані результати дозволяють визначити обчислювальну ефективність узагальненого методу шивання.

**Ключові слова:** метод шивання, операторні формули Френеля, швидкість збіжності наближень.