

**Ю. П. Галюк***Санкт-Петербургский государственный университет**35, Университетский просп., Санкт-Петербург, Петергоф, 198504, Россия*E-mail: [galyuck@paloma.spbu.ru](mailto:galyuck@paloma.spbu.ru)**ШУМАНОВСКИЕ РЕЗОНАНСЫ В МОДЕЛИ ГРОЗОВОЙ АКТИВНОСТИ,  
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ЗЕМНОМУ ШАРУ**

Интерес к явлению шумановских резонансов объясняется тем, что это один из немногих инструментов, с помощью которых можно исследовать свойства нижней ионосферы, измерение которых прямыми методами крайне затруднено (спутники летают выше, а метеозонды – ниже). Само явление обязано наличием в диапазоне сверхнизких частот кругосветных электромагнитных волн, вызванных мировой грозовой активностью. При решении обратных задач крайне важно иметь максимально адекватную математическую модель явления, меняя параметры которой добиваются наилучшего совпадения теории с экспериментом. В статье излагаются строгие методы расчета полей диапазона сверхнизких частот в модели регулярного волновода «Земля–изотропная ионосфера», а также электрической и магнитной компонент мощности шума. Ил. 5. Библиогр.: 7 назв.

**Ключевые слова:** сверхнизкие частоты, шумановские резонансы, мировая грозовая активность, профили проводимости ионосферы, функции Лежандра, метод Монте-Карло.

Существует много работ, в которых сопоставляются реальные экспериментальные данные по измерению параметров спектров сверхнизкочастотных (СНЧ) шумов, вызванных мировой грозовой активностью, с теоретически рассчитанными [1–3]. В общей постановке, учитывающей анизотропию ионосферы, различия между дневными и ночными условиями распространения, наличие мировых грозовых центров, задача не решена до сих пор. Чаще всего в них использовались крайне упрощенные физические модели волновода «Земля–ионосфера», позволяющие аналитически получить результат. Целью настоящей работы является оценка погрешности решения этой задачи, связанной именно с использованием приближенных методов вычисления параметров распространения и расчетом полей.

**1. Физическая модель.** Считаем, что СНЧ-шум вызван вертикальными разрядами молний, бьющих независимо друг от друга и распределенных равномерно по поверхности земного шара. Свойства ионосферы, влияющие на распространение СНЧ-сигналов, определяются ее профилем проводимости  $\sigma_i(r)$ , не зависящим от места наблюдения. Недостатки этой модели: в реальности интенсивность разрядов молний зависит от координат (сосредоточены в окрестности экватора); не учитываются зависимость профилей проводимости от зенитного угла Солнца «день–ночь» и анизотропия ионосферы, вызванная влиянием магнитного поля Земли.

**2. Математическая модель.** Везде в дальнейшем используется сферическая система координат  $\{r, \theta, \varphi\}$  с началом в центре Земли и осью  $\theta = 0$ , направленной на приемник.

Формулы для вычисления вертикальной электрической  $E_r$  и горизонтальной магнитной  $H_\varphi$  компонент поля являются обобщением формул 4.19 и 4.20 из [2], выведенных для случая ионо-

сферы, свойства которой определяются через поверхностный импеданс, отнесенный к некоторой «эффективной» высоте  $h$ :

$$E_r(\omega) = \frac{M_c(\omega)}{4ha^2 \varepsilon_0} \frac{i\nu(\nu+1)}{\omega} \frac{P_\nu(\cos[\pi-\theta])}{\sin(\pi\nu)}, \quad (1)$$

$$H_\varphi(\omega) = -\frac{M_c(\omega)}{4ha} \frac{P_\nu^1(\cos[\pi-\theta])}{\sin(\pi\nu)}.$$

Здесь  $a$  – радиус Земли;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота;  $M_c(\omega)$  – токовый момент источника (молнии), во временной области представляет собой  $\delta$ -функцию, а в спектральной – не зависит от частоты. Параметры  $h$  (эффективная высота ионосферы над Землей) и  $\nu(\omega)$  (безразмерная комплексная постоянная распространения) зависят от используемой модели ионосферы. В некоторых моделях ионосферных профилей, таких как импедансная плоскостойкая или экспоненциальная, для этих параметров существуют достаточно удовлетворительные приближенные аналитические решения [1, 3].

Зависимость поля от углового расстояния  $\theta$  между источником и точкой наблюдения описывается функцией Лежандра  $P_\nu(\cos[\pi-\theta])$  комплексного значка  $\nu$ .

Формальное обобщение формул (1) на случай изотропной ионосферы с проводимостью  $\sigma_i(r)$ , зависящей только от высоты  $r$ , производится путем замены эффективной высоты ионосферы  $h$  на так называемый «нормировочный интеграл»  $N^0$  (в общем случае комплексный):

$$E_r(\omega) = \frac{M_c(\omega)}{4a^2 N^0 \varepsilon_0} \frac{i\nu(\nu+1)}{\omega} \frac{P_\nu(\cos[\pi-\theta])}{\sin(\pi\nu)}, \quad (2)$$

$$H_\varphi(\omega) = -\frac{M_c(\omega)}{4aN^0} \frac{P_\nu^1(\cos[\pi-\theta])}{\sin(\pi\nu)}.$$

Параметры распространения – собственное число  $\nu$  и нормировочный интеграл  $N^0$ , входящие в (2), будем находить, следуя процедуре, изложенной в [4].

**3. Вычисление параметров распространения.** Параметры  $\nu$  и  $N^0$  находятся из решения задачи на собственные значения  $\nu$  дифференциального оператора:

$$\frac{d}{dr} \delta(r) - i\kappa \varepsilon(r) \delta^2(r) + i\kappa + \frac{\nu(\nu+1)}{i\kappa r^2 \varepsilon(r)} = 0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon(r) = 1 + \frac{\sigma_i(r)}{i\omega \varepsilon_0}$ , с граничными условиями

$\delta(a) = 0$  и  $\delta(\infty) = 0$ . В этой модели проводимость ионосферы  $\sigma_i(r)$ , зависящая только от высоты  $r$ , входит в выражение для относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(r)$ . Собственные значения  $\nu$  находятся по методу итераций, причем для «нулевой» нормальной волны хорошим начальным приближением может служить значение  $\nu \approx ka$ .

#### 4. Вычисление функций Лежандра.

Задача вычисления функций Лежандра  $P_\nu^m(z)$ , используемых в (1) и (2), от комплексного аргумента  $z$  и комплексных значков  $\nu$  и  $m$  оказывается не элементарной, так как невозможно предложить алгоритм, одинаково эффективный при всевозможных соотношениях параметров  $\theta$  и  $\nu$ . Это видно, в частности, из того, что в фундаментальном труде Г. Бейтмена и А. Эрдейи [5] приводится более 100 формул для разложений. Вариант алгоритма, ориентированного именно на расчет полей СНЧ-диапазона в сферической системе координат и основанного на ускорении ряда «зонных гармоник», приводится в [1, 2]. Ниже описан другой алгоритм, имеющий более широкую область применения, прежде всего, по частоте. Аргумент  $z$  является вещественным и обозначается в этом случае как  $x = \cos \theta$ , а область его определения является интервал  $[-1...1]$ ; значок  $\nu$  – комплексное число.

• При больших  $|\nu\theta|$  и  $|\nu(\pi - \theta)|$  используется асимптотический ряд 3.5(5)[5]:

$$\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) P_\nu^\mu(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \Gamma(\nu + \mu + 1) \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\left(\frac{1}{2} + \mu\right)_l \left(\frac{1}{2} - \mu\right)_l}{l! (2 \sin \theta)^l \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_l} \times \\ \times \sin\left[\left(\nu + l + \frac{1}{2}\right)\theta + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{1}{2}l\pi\right].$$

Для вычисления используемого в этой формуле отношения двух гамма-функций, аргументы которых отличаются на заданную константу (в нашем случае – 1/2), можно воспользоваться разложением 6.1.47 [6]:

$$z^{b-a} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim 1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2z} + \frac{1}{12} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \times \\ \times (3(a+b-1)^2 - a+b-1) \frac{1}{z^2} + \dots$$

• В окрестности антипода используется гипергеометрический ряд 3.5(9)[5]:

$$\Gamma(1-\mu) P_\nu^\mu(\cos \theta) = \\ = (\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2})^\mu F[-\nu, \nu+1; 1-\mu; (\sin \frac{\theta}{2})^2], \quad 0 < \theta < \pi.$$

В окрестности источника при помощи формул 3.4(14)[5]

$$P_\nu^\mu(-x) = P_\nu^\mu(x) \cos[\pi(\nu + \mu)] - \\ - \frac{\pi}{2} Q_\nu^\mu(x) \sin[\pi(\nu + \mu)], \quad 0 < x < 1,$$

задача сводится к вычислению сферических функций для углов, симметрично расположенных относительно экватора, т. е. когда  $\theta$  заменяется на  $(\pi - \theta)$ ; в результате для этого аргумента сходимость улучшается. Усложнение вычислений заключается в необходимости вычислять, кроме функции  $P_\nu$ , также функцию  $Q_\nu$ . Эта функция вычисляется по формулам 3.6.1(11)[5]:

$$\frac{2\pi}{\sin(\nu\pi)} Q_\nu^m(z) = \frac{\pi}{\sin(\nu\pi)} P_\nu^m(z) \left[ \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 2\gamma - \psi(\nu+m+1) - \psi(\nu-m+1) \right] - \\ - e^{im\pi} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{r=0}^{m-1} \Gamma(r-\nu) \Gamma(r+\nu+1) \Gamma(m-r) \frac{\cos(r\pi)}{r!} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)^r - \\ - \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{l=1}^m \frac{\Gamma(m+l-\nu) \Gamma(m+l+\nu+1)}{l!(m+l)!} \sigma(l) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)^{m+l} - \\ - \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{r=0}^m \frac{\Gamma(r-\nu) \Gamma(r+\nu+1)}{r!(r+m)!} \sigma(m+r) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)^r,$$

где  $\sigma(l) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{l}$ ,  $\sigma(0) = 0$ .

При  $m = 0$  эта формула имеет вид:

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2} P_\nu(z) \left[ \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) - 2\gamma - 2\psi(\nu+1) \right] - \frac{1}{\pi} \sin(\nu\pi) \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma(-\nu+l) \Gamma(\nu+l+1) \frac{\sigma(l)}{(l!)^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{2} \right)^l,$$

причем при таком преобразовании явно выделяется логарифмическая особенность  $\ln[(z+1)/(z-1)]$  в источнике. Функцию  $\psi(\nu+1)$  из 3.6.1(11)[5] можно вычислить по формулам 6.3.18 [6]

$$\begin{aligned} \psi(z) &\sim \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2nz^{2n}} = \\ &= \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6} + \dots \\ &(z \rightarrow \infty \text{ in } |\arg z| < \pi). \end{aligned}$$

**5. Вычисление суммарного шума.** В радиотехнике используется понятие «спектральной плотности мощности шума», которая определяется как часть энергии сигнала, приходящаяся на полосу 1 Гц за 1 секунду. В реальности, чтобы обеспечить устойчивость результатов, время накопления делают намного большим 1 секунды, а результат делят на этот период. Интегрирование по времени можно заменить вычислением квадрата соответствующей фурье-компоненты сигнала при длине реализации, составляющей 1 секунду.

Для расчета спектральной мощности шума, вызванного мировой грозовой активностью, необходимо задавать, кроме параметра  $M_c(\omega)$  – усредненного токового момента одной молнии, также и  $L$  – среднее число ударов молнии на земном шаре в секунду. Оценки этих величин даются, например, в [2]:  $M_c(\omega) \approx 10^5$  А·м·с,  $L \approx 100$  с<sup>-1</sup>.

В силу некоррелированности моментов грозовых разрядов нельзя суммировать непосредственно поля молний, рассредоточенных по поверхности земного шара, а только квадраты модулей полей. Тем самым задача вычисления мощности шума сводится к вычислению интеграла по поверхности шара от функций  $|E_r|^2$  и  $|H_d|^2$ , вычисляемых по формулам (2).

Реализовать вычисление этих интегралов можно тремя способами: суммировать ряд зональных гармоник, использовать квадратурные формулы интегрирования или метод Монте-Карло. У каждого способа есть свои плюсы.

**5.1. Метод статистических испытаний Монте-Карло.** Этот способ кажется наиболее естественным, так как фактически эмулирует реальную грозовую активность. Он легко обобща-

ется на случай с реальными моделями распределениями грозовых разрядов по месту, форме и величине.

При использовании метода Монте-Карло вычисляются следующие суммы:

$$\langle E_r^2(f) \rangle = \frac{L |M_c(\omega)|^2 |v(\nu+1)|^2}{M^4 a^4 \varepsilon_0^2 \omega^2 |N^0|^2} \times \sum_M \left| \frac{P_\nu(\cos[\pi - \theta])}{\sin(\pi\nu)} \right|^2, \quad (4a)$$

$$\langle H_r^2(f) \rangle = \frac{L |M_c(\omega)|^2}{M^4 a^2 |N^0|^2} \times \sum_M \cos^2(\varphi) \left| \frac{P_\nu^1(\cos[\pi - \theta])}{\sin(\pi\nu)} \right|^2, \quad (4b)$$

где  $\langle E_r^2 \rangle$  и  $\langle H_r^2 \rangle$  – искомые усредненные спектральные мощности вертикальной электрической и горизонтальной магнитной компонент шума;  $\theta$  и  $\varphi$  – угловые координаты молний относительно точки наблюдения (разыгрываемые случайные величины;  $\cos\varphi$  учитывает азимут между трассой распространения сигнала и направлением горизонтальной магнитной антенны (используется только при вычислении магнитной компоненты шума);  $M$  – число испытаний.

В методе Монте-Карло случайные числа с заданной функцией распределения получают из псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на интервале [0...1], которые в дальнейшем будем называть *Random*. Координаты точек, равномерно распределенных на поверхности сферы, задаются формулами:  $\varphi = \text{Random} * 2\pi$ ,  $\theta = \arccos(2 * \text{Random} - 1)$ .

Для разыгрывания молний можно также использовать немного измененную формулу:

$$\langle E_r^2(f) \rangle = \frac{2 L |M_c(\omega)|^2 |v(\nu+1)|^2}{\pi M^4 a^4 \varepsilon_0^2 \omega^2 |N^0|^2} \times \sum_M \sin(\theta) \left| \frac{P_\nu(\cos[\pi - \theta])}{\sin(\nu\pi)} \right|^2, \quad (5a)$$

$$\langle H_r^2(f) \rangle = \frac{2 L |M_c(\omega)|^2}{2\pi M^4 a^2 |N^0|^2} \times \sum_M \sin(\theta) \left| \frac{P_\nu^1(\cos[\pi - \theta])}{\sin(\nu\pi)} \right|^2, \quad (5b)$$

$\varphi = \text{Random} * 2\pi$ ,  $\theta = 2\pi * \text{Random}$ . Формулы (4) и (5) различаются способом разыгрывания координаты  $\theta$ , наличием множителя  $\sin\theta$ , учитывающего разницу длин параллелей на разных широтах, и множителем  $2/\pi$ , компенсирующим разницу в площадях

поверхности шара единичного радиуса ( $4\pi$ ) и прямоугольника из координат  $\theta, \varphi$  ( $\pi \cdot 2\pi = 2\pi^2$ ), на котором разыгрываются координаты молний. В (5б) множитель  $\cos^2 \varphi$  заменен на  $1/2$  в силу соотношения  $\sum \cos^2(2\pi \cdot \text{Random}) = M/2$ .

5.2. *Прямое численное интегрирование.* Формулы для численного интегрирования мощности шума очень похожи на выражения, используемые в методе Монте-Карло, только суммирование надо заменить интегрированием по поверхности сферы.

При выводе соответствующей формулы необходимо принять во внимание следующее: количество молний, ударяющих за 1 с на всем земном шаре, равно параметру  $L$ , поэтому средняя плотность токового момента, приходящаяся на  $1 \text{ км}^2$ , равна  $LM_c(\omega)/S$ , где  $S$  – площадь земного шара  $4\pi a^2$ .

$$\begin{aligned} \langle E_r^2(f) \rangle &= \frac{L |M_c(\omega)|^2 |v(v+1)|^2}{S 4^2 a^4 \varepsilon_0^2 \omega^2 |N^0|^2} \times \\ &\times \oint_S \left| \frac{P_v(\cos[\pi - \theta])}{\sin(v\pi)} \right|^2 dS, \\ \langle H_r^2(f) \rangle &= \frac{L |M_c(\omega)|^2}{S 4^2 a^2 |N^0|^2} \times \\ &\times \oint_S \cos^2(\varphi) \left| \frac{P_v^1(\cos[\pi - \theta])}{\sin(v\pi)} \right|^2 dS. \end{aligned} \quad (6)$$

Элемент поверхности равен  $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , а интегрирование по поверхности разбивается на интегрирование по переменным  $\theta$  и  $\varphi$ . Интеграл по  $\varphi$  вычисляются по формулам  $\int d\varphi = 2\pi, \int \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$ , и выражения (6) принимают вид:

$$\begin{aligned} \langle E_r^2(f) \rangle &= \frac{L |M_c(\omega)|^2 |v(v+1)|^2}{2a^4 \varepsilon_0^2 4^2 \omega^2 |N^0|^2} \times \\ &\times \int_0^\pi \sin(\theta) \left| \frac{P_v(\cos[\pi - \theta])}{\sin(v\pi)} \right|^2 d\theta, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \langle H_r^2(f) \rangle &= \frac{L |M_c(\omega)|^2}{4a^2 4^2 |N^0|^2} \times \\ &\times \int_0^\pi \sin(\theta) \left| \frac{P_v^1(\cos[\pi - \theta])}{\sin(v\pi)} \right|^2 d\theta. \end{aligned} \quad (7б)$$

Дополнительный множитель  $1/2$  у магнитной компоненты учитывает интеграл от  $\cos^2(\varphi)$ .

Интегралы можно вычислять, используя любые квадратурные формулы, в частности, по методу Симпсона (Котеса). Сложность возникает при расчете мощности магнитной компоненты шума  $\langle H_\varphi^2 \rangle$ . Дело в том, что в окрестности источника функция Лежандра имеет логарифмическую особенность, а ее производная по параметру  $\theta$  входит в выражение для магнитной компоненты как  $1/\theta$ . Мы интегрируем квадрат модуля компоненты поля, вследствие чего, несмотря на множитель  $\sin \theta$ , интеграл расходится. Понятно, что в реальности никаких бесконечностей при регистрации магнитного поля не наблюдается. Одно из объяснений этого явления заключается в несовершенстве модели равномерного распределения грозовых разрядов по поверхности земного шара. Мировые центры грозовой активности сосредоточены, в основном, в окрестности экватора [1, 2], а измерительные пункты чаще всего находятся в средних широтах, где грозы бывают существенно реже. Кроме того, поля от местных гроз (ближе 100 км) практически не зависят от свойств ионосферы, но могут перегружать приемные тракты приемников. Поэтому в реальных экспериментах ближние молнии исключают из обработки.

С другой стороны, формулы (1) и (2), основывающиеся на одномодовом приближении, не применимы на расстояниях порядка нескольких высот ионосферы (в наших обозначениях это  $N^0$ ), т. е. ближе 100...200 км. Самым простым способом решения этой проблемы является исключение этого участка из области интегрирования. То же самое соображение касается и использования метода Монте-Карло. Выбрасывание из процедуры интегрирования области радиусом даже 200 км не приводит к снижению достоверности результатов, так как исключаемая площадь составляет менее 0,03 % от площади земной поверхности.

5.3. *Суммирование ряда зональных гармоник.* Метод основывается на использовании разложения Дуголла 3.10(б)[2] функции Лежандра в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} P_v^{-\mu}(\cos \theta) &= \frac{\sin(v\pi)}{\pi} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{v-n} - \frac{1}{v+n+1} \right) P_n^{-\mu}(\cos \theta), \\ &- \pi < \theta < \pi, \mu \geq 0. \end{aligned}$$

Так как нас интересует только функция Лежандра  $P_v(\cos \theta)$ , входящая в (7а), то, положив в формуле верхний индекс  $\mu$  равным нулю, получим искомого представление:

$$\frac{P_\nu(\cos\theta)}{\sin(\nu\pi)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{\nu(\nu+1)-n(n+1)} P_n(\cos\theta). \quad (8)$$

После подстановки (8) в формулу (7а), при возведении в квадрат выражения для  $P_\nu(\cos\theta)$ , получится двойной бесконечный ряд относительно значков полиномов Лежандра. Если вспомнить свойство ортогональности полиномов Лежандра

$$\int_0^\pi \sin(\theta) P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm},$$

то после интегрирования по  $\theta$  получим бесконечный ряд только по совпадающим значкам  $n$ :

$$\langle E_r^2(f) \rangle = \frac{L|M_c(\omega)|^2}{2a^4 \varepsilon_0^2} \frac{1}{2\pi^2} \frac{|v(v+1)|^2}{4^2 \omega^2 |N^0|^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{|n(n+1)-v(v+1)|^2}. \quad (9)$$

В диапазоне шумановских частот (ниже 50 Гц) собственное число нулевой моды  $\nu$ , как уже говорилось, приблизительно равно  $\nu \approx ka$  и не превышает 7. В силу этих причин ряд (9) хорошо сходится во всем диапазоне частот.

Также формулу (9) можно получить, подставив в (7а) представление для произведения двух функций Лежандра 3.10(8)[2]:

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta) P_\nu^{-\lambda}(\cos\theta') = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\nu-n} - \frac{1}{\nu+n+1} \right) P_n^{-\mu}(\cos\theta) P_n^{-\lambda}(\cos\theta'),$$

$-\pi < \theta + \theta' < \pi, -\pi < \theta - \theta' < \pi, \mu \geq 0, \lambda \geq 0,$

положив в нем  $\mu = 0, \lambda = 0$  и  $\theta' = \theta$ .

Метод суммирования ряда зональных гармоник (9) применим только при вычислении мощности вертикальной электрической компоненты шума. Аналогичный ряд для расчета мощности горизонтальной магнитной компоненты шума расходится.

**6. Сравнение различных методов расчета шумов.** При сопоставлении результатов, полученных тремя разными способами, надо понимать, что они могут немного отличаться. В каждом из алгоритмов можно задавать точность вычислений, при этом время выполнения будет обратно пропорционально точности:

- Точность вычислений по методу Монте-Карло обратно пропорциональна числу испытаний  $M$ ; это довольно слабая сходимость и обычно

требуется несколько десятков или сотен тысяч розыгрышей.

- Точность вычислений при реализации формул (7) зависит от используемого метода численного интегрирования: для наиболее часто применяемого метода Симпсона она пропорциональна четвертой степени от шага интегрирования  $h^4$ .

- Общие члены ряда зональных гармоник (9), определяющие точность расчетов, обратно пропорциональны третьей степени номера  $n^3$ , что объясняет его хорошую сходимость.

Результаты расчетов по методу Монте-Карло (4), (5) и через численное интегрирование (7) зависят от точности вычисления функций Лежандра, а также от размеров области в окрестности источника, которая исключается из процедуры интегрирования.

Из самых общих соображений наиболее достоверными следует считать результаты, полученные по методу суммирования зональных гармоник, однако он пригоден только для расчетов мощности вертикальной компоненты шума и только для модели грозовой активности, равномерно распределенной по земному шару. Остальные методы, несмотря на большую сложность, лишены этих недостатков.

При сравнении использовался профиль проводимости ионосферы  $\sigma_i(h)$ , приведенный на рис. 1.

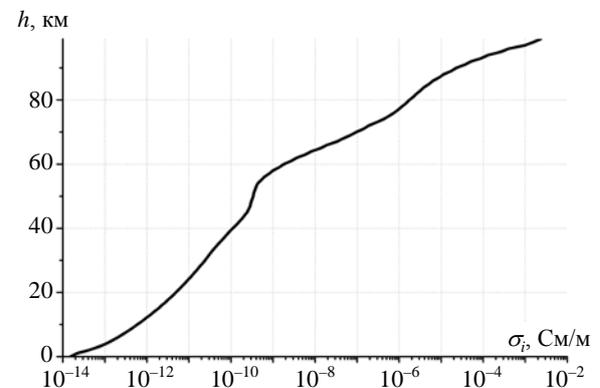


Рис. 1. Профиль проводимости ионосферы

На рис. 2 и 3 приведены энергетические спектры (в условных единицах) вертикальной компоненты электрического и горизонтальной компоненты магнитного полей.

Качественно графики, рассчитанные различными методами, не отличаются, поэтому на этих рисунках приводится только одна линия, соответствующая одному из методов. При реализации этих методов были заданы следующие параметры:

- относительная точность вычисления функций Лежандра –  $10^{-5}$ ;

- точность суммирования ряда зональных гармоник –  $10^{-5}$ ;
- число шагов интегрирования в методе Симпсона – 400;
- радиус области в окрестности источника, исключаемого из интегрирования – 200 км.

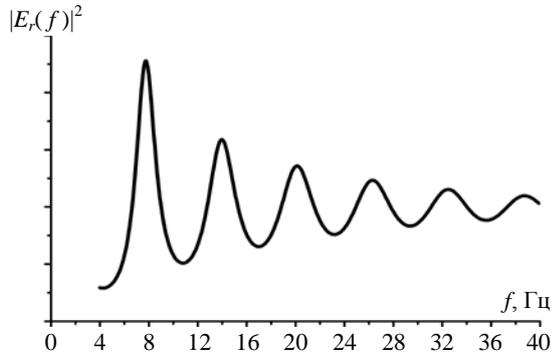


Рис. 2. Спектр мощности электрической компоненты поля

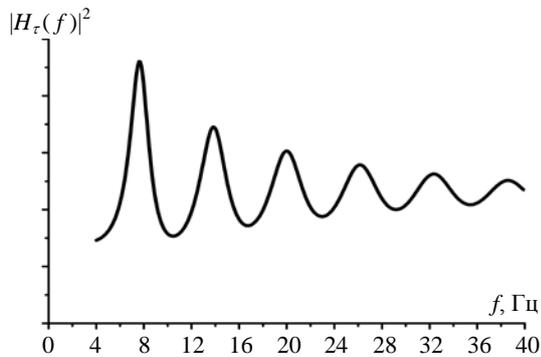


Рис. 3. Спектр мощности магнитной компоненты поля

Влияние количества испытаний в методе Монте-Карло на точность расчетов показано на рис. 4 и 5: жирная линия – прямое интегрирование; штриховые линии – три варианта счета по методу Монте-Карло с числом попыток 10 000; сплошная линия – метод Монте-Карло с числом попыток 100 000.

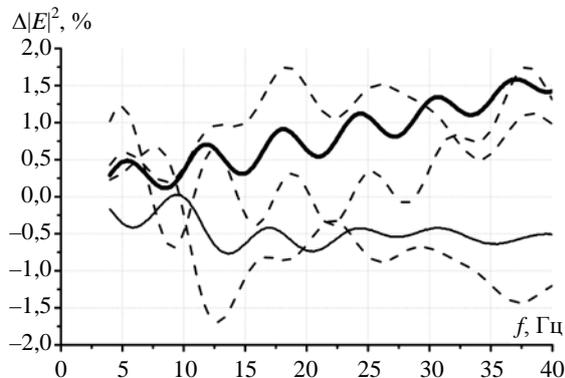


Рис. 4. Точность вычисления спектра мощности электрической компоненты поля  $|E_r(f)|^2$  (относительно метода суммирования зональных гармоник)

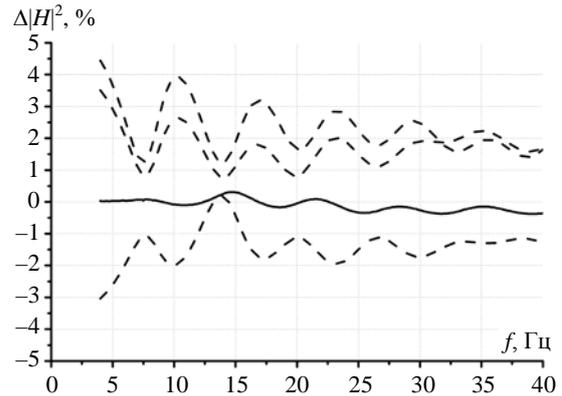


Рис. 5. Точность вычисления спектра мощности магнитной компоненты поля  $|H_r(f)|^2$  (относительно метода прямого интегрирования)

Хорошо видно, что несмотря на относительно случайный вид результатов, полученных по методу Монте-Карло, их точность увеличивается с ростом числа испытаний, хотя и достаточно медленно. Точность вычисления мощности магнитной компоненты шума ниже, чем электрической, что объясняется, видимо, тем, что она выражается через производную функции Лежандра, имеющую более сильную особенность в окрестности источника.

**Выводы.** Таким образом, показано, что при использовании современной вычислительной техники применение точных численных методов расчета характеристик распространения и полей ничуть не сложнее в реализации, чем приближенные аналитические методы. В дальнейшем увеличения соответствия между теорией и экспериментом следует ожидать при усложнении модели распространения (учет нерегулярностей «день-ночь» и анизотропии ионосферы). Наиболее перспективным методом решения такой задачи следует считать метод двумерных телеграфных уравнений [7].

#### Библиографический список

1. Блюх П. В. Глобальные электромагнитные резонансы в полости Земля–ионосфера / П. В. Блюх, А. П. Николаенко, Ю. Ф. Филиппов. – К.: Наук. думка, 1977. – 199 с.
2. Nickolaenko A. P. Resonances in the Earth-ionosphere cavity / A. P. Nickolaenko, M. Hayakawa. – Dordrecht-Boston-L.: Kluwer Academic Publ., 2002. – 380 p.
3. Williams E. R. Distinguishing ionospheric models using Schumann resonance spectra / E. R. Williams, V. C. Mushtak, A. P. Nickolaenko // J. Geophys. Res. – 2006. – 111, Iss. D16. – D16107 (10 p.).
4. Галюк Ю. П. Сравнение точного и приближенного решения задачи о шумановском резонансе для профиля проводимости с «коленом» // Ю. П. Галюк, А. П. Николаенко, М. Хайакава // Радиофизика и электрон. – 2015. – 6(20), № 2. – С. 40–47.
5. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: в 2 т. Т. 1 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи; пер. с англ. Н. Я. Виленкина. – 2-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

6. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
7. *Кириллов В. В.* Двумерная теория распространения электромагнитных волн СНЧ-диапазона в волноводе Земля–ионосфера / В. В. Кириллов // Изв. вузов. Радиофизика. – 1996. – 39, № 12. – С. 1103–1112.

*Рукопись поступила 12.10.2015.*

Y. P. Galyuk

#### SCHUMANN RESONANCE IN THE MODEL OF THUNDERSTORM ACTIVITY, UNIFORMLY DISTRIBUTED OVER THE GLOBE

The interest in the phenomenon of Schumann resonances arises from the fact that it is one of the few tools that can help you learn the properties of the lower ionosphere, the measurement of which by direct methods is extremely difficult (the satellites are flying above, and weather balloons – below). The phenomenon is caused by the presence of circumnavigation electromagnetic waves in the range of ultra-low frequencies, caused by the global thunderstorm activity. In solving inverse problems it is extremely important to have the most adequate mathematical model of the phenomenon, changing the parameters of which, one can achieve the perfect match between theory and experiment. The article sets out strict methods of calculation of ELF fields in the model of regular waveguide “Earth-isotropic ionosphere”, as well as the electric and magnetic components of the noise power.

**Key words:** ultra-low frequency, Schumann resonances, the world thunderstorm activity, profiles conductivity of the ionosphere, Legendre functions, Monte Carlo method.

Ю. П. Галюк

#### ШУМАНІВСЬКІ РЕЗОНАНСИ У МОДЕЛІ ГРОЗОВОЇ АКТИВНОСТІ, ЩО РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНА ПО ЗЕМНІЙ КУЛІ

Інтерес до явища шуманівських резонансів пояснюється тим, що це один з небагатьох інструментів, за допомогою яких можна дослідити властивості нижньої іоносфери, вимірювання яких прямими методами вкрай складне (супутники літають вище, а метеозонди – нижче). Саме явище зобов'язане наявністю у діапазоні наднизьких частот навколосвітніх електромагнітних хвиль, які викликані світовою грозовою активністю. У процесі розв'язання обернених задач вкрай важливо мати максимально адекватну математичну модель явища, за допомогою якої шляхом зміни параметрів домагаються найкращого збігу теорії з експериментом. У статті викладено строгі методи розрахунку полів діапазону наднизьких частот у моделі регулярного хвилеводу «Земля–ізотропна іоносфера», а також електричної та магнітної компонент потужності шуму.

**Ключові слова:** наднизькі частоти, шуманівські резонанси, світова грозова активність, профіль провідності іоносфери, функції Лежандра, метод Монте-Карло.