

А. В. Бровенко, А. А. Вертий\*, Н. П. Мележик, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: [melezhik@ire.rharkov.ua](mailto:melezhik@ire.rharkov.ua)

\*Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева

2, ул. Мирзояна, Астана, 010000, Республика Казахстан

## ОДНОМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД

Задача о восстановлении профиля диэлектрической проницаемости слоистой диэлектрической среды по значениям коэффициента отражения для конечного множества частот зондирующей плоской электромагнитной волны является актуальной в связи с разработкой современных методов неразрушающего контроля. Для ее решения исходные задачи сведены к поиску оптимального управления (профиля диэлектрической проницаемости) задачи Коши для уравнения Риккати. Построение оптимального управления в классе полиномиальных функций основано на минимизации соответствующего функционала. Предложен критерий отбора полиномиальных аппроксимаций профиля диэлектрической проницаемости, который использует разделение входных данных на обучающую и проверочную последовательности зондирующих частот. Проведен анализ погрешности восстановления мнимой части диэлектрической проницаемости слоистой среды. Установлено, что относительная погрешность восстановления малой мнимой части диэлектрической проницаемости ( $\text{Im}\varepsilon \sim 10^{-4}$ ) не превосходит 10 %, а большой ( $\text{Im}\varepsilon \geq 0,1$ ) – составляет менее 1 %. Разработанные алгоритмы позволяют восстанавливать комплексную диэлектрическую проницаемость слоистой среды с приемлемой для практических приложений точностью. Ил. 5. Библиогр.: 9 назв.

**Ключевые слова:** обратная задача, коэффициент отражения, профиль диэлектрической проницаемости, слоистая среда.

В последнее время в связи с развитием нанотехнологий и возможностью создания слоистых структур, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых могут изменяться вдоль одной из пространственных координат достаточно произвольным образом, возрос интерес к изучению обратных задач дифракции волн на слоистых средах [1]. Это также связано с необходимостью разработки эффективных методов неразрушающего контроля материальных параметров синтезируемых с помощью нанотехнологий слоистых структур. В частности, с созданием соответствующих алгоритмов решения обратных задач электромагнитного зондирования слоистых сред, которые позволяют с гарантированной точностью восстанавливать материальные параметры по характеристикам отраженного поля.

В работах [2, 3] были предложены методы решения прямых и обратных задач дифракции волн на слоистых средах, материальные параметры которых являются функциями одной пространственной координаты. В данной работе представлены результаты по дальнейшему развитию этих методов. В частности, предложен критерий однозначного выбора оптимальной полиномиальной аппроксимации профиля комплексной диэлектрической проницаемости неоднородного слоя по частотной зависимости коэффициента отражения.

**1. Постановка обратной задачи электромагнитного зондирования.** В качестве модели слоистой среды рассмотрим полупространство  $P^- = (-\infty < x, y < \infty, z \leq 0)$ , заполненное неоднородной средой с материальными параметрами, зависящими только от пространственной переменной  $z$ . Полагаем при этом, что относительная диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon(z)$  при  $-h \leq z \leq 0$  является комплекснозначной и непрерывной функцией, а при  $z \leq -h$   $\varepsilon(z) = \varepsilon_1 = \text{const}$ . Без ограничения общности будем считать, что магнитная проницаемость  $\mu$  в полупространстве  $P^-$  равняется единице. Среда полупространства  $P^+ = (-\infty < x, y < \infty, z > 0)$  имеет диэлектрическую и магнитную проницаемости соответственно  $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 = \text{const}$ ,  $\mu = 1$  (рис. 1).

родной средой с материальными параметрами, зависящими только от пространственной переменной  $z$ . Полагаем при этом, что относительная диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon(z)$  при  $-h \leq z \leq 0$  является комплекснозначной и непрерывной функцией, а при  $z \leq -h$   $\varepsilon(z) = \varepsilon_1 = \text{const}$ . Без ограничения общности будем считать, что магнитная проницаемость  $\mu$  в полупространстве  $P^-$  равняется единице. Среда полупространства  $P^+ = (-\infty < x, y < \infty, z > 0)$  имеет диэлектрическую и магнитную проницаемости соответственно  $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 = \text{const}$ ,  $\mu = 1$  (рис. 1).

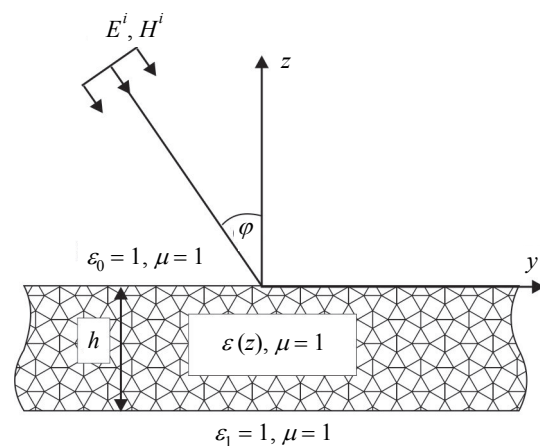


Рис. 1. Геометрия задачи

Пусть из полупространства  $P^+$  на слоистую среду падает плоская монохроматическая зондирующая волна с волновым вектором, лежа-

щим в плоскости YOZ и образующим угол  $\varphi$  с осью OZ (угол падения):

$$\begin{aligned} E_x^i &= E_0 e^{ik(y \sin \varphi - z \cos \varphi)}, \\ E_y^i &= E_z^i = 0, \\ H_x^i &= 0, \quad H_y^i = -\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi E_x^i, \\ H_z^i &= -\sqrt{\varepsilon_0} \sin \varphi E_x^i. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0} / c$ ,  $\omega$  – частота зондирующей волны;  $c$  – скорость света в вакууме (зависимость от времени выбрана в виде  $e^{-i\omega t}$ ).

Из уравнений Максвелла с учетом условия излучения следует, что в полупространстве  $P^+$  компонента  $E_x$  полного электрического поля имеет вид

$$E_x = E_0 \left[ e^{ik(y \sin \varphi - z \cos \varphi)} + R e^{ik(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \right], \quad (2)$$

где  $R$  – коэффициент отражения от слоистой среды. Остальные компоненты полного электромагнитного поля выражаются через  $E_x$  по формулам

$$\begin{aligned} H_x &= 0, \quad H_y = \frac{1}{ik_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \\ H_z &= -\frac{1}{ik_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad k_0 = \omega / c. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем импеданс  $Z$  границы слоистой среды

$$Z = \left. \frac{E_x}{H_y} \right|_{z=0}. \quad (4)$$

Как следует из (2) и (3), коэффициент отражения  $R$  и импеданс  $Z$  связаны зависимостью

$$Z = \frac{R+1}{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi (R-1)} \quad (5)$$

и представляют собой основные измеряемые характеристики при электромагнитном зондировании слоистой среды [4, 5].

Обратные задачи электромагнитного зондирования можно сформулировать следующим образом.

*Обратная задача частотного зондирования.* Требуется по коэффициенту отражения  $R$  (импедансу  $Z$ ), известному в диапазоне частотного параметра  $k_0 \in [k_{01}, k_{02}]$  при фиксированном угле падения зондирующей волны (1), определить диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon(z)$  слоистой среды.

*Обратная задача позиционного зондирования.* Требуется по коэффициенту отражения  $R$  (импедансу  $Z$ ), известному в диапазоне углов па-

дения  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$  при фиксированной частоте зондирующей волны (1), определить диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon(z)$  слоистой среды.

Возможна более общая постановка задачи, когда в качестве входных данных рассматривается коэффициент отражения  $R$  (импеданс  $Z$ ), известный в диапазонах частотных параметров  $k_0 \in [k_{01}, k_{02}]$  и углов падения  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$  зондирующей волны.

Используя результаты работы [6], можно показать, что сформулированные обратные задачи имеют единственное решение в классе кусочно-непрерывных функций  $\varepsilon(z)$ .

*Замечание.* При формулировке обратных задач в качестве зондирующей волны была выбрана плоская  $E$ -поляризованная волна (1). Аналогичные постановки обратных задач имеют место и в случае  $H$ -поляризованной плоской волны.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем рассматривать зондирующую волну (1). Кроме того, будем считать, что диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(z)$  при  $z < -h$  равна постоянной величине  $\varepsilon_1$ . При этом  $h$  и  $\varepsilon_1$  являются известными величинами; требуется определить  $\varepsilon(z)$  в интервале  $[-h, 0]$ .

Воспользуемся результатами работ [2, 3] и сведем обратные задачи электромагнитного зондирования к задачам оптимального управления.

Из уравнений Максвелла следует, что компонента  $E_x^s$  электрического поля в неоднородном слое  $-h \leq z \leq 0$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta E_x^s + k_0^2 \varepsilon(z) E_x^s = 0. \quad (6)$$

В соответствии с (1)  $E_x^s$  можно представить в виде

$$E_x^s = E(z) e^{iky \sin \varphi}. \quad (7)$$

Тогда для  $E(z)$  из (7) получаем уравнение

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 (\varepsilon(z) - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi) E = 0. \quad (8)$$

Как показано в [2], решение уравнения (8), удовлетворяющее у условиям сопряжения на границах неоднородного слоя, имеет вид

$$E(z) = \exp \left( \int_{-h}^z V(z) dz \right). \quad (9)$$

Здесь функция  $V(z)$  является решением задачи Коши для уравнения Риккати

$$\frac{dV}{dz} + V^2 + k_0^2 (\varepsilon(z) - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi) = 0; \quad (10)$$

$$V(-h) = -ik_0 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi}. \quad (11)$$

С помощью функции  $V(z)$  коэффициент отражения от неоднородного слоя  $R$  можно представить в виде

$$R = \frac{ik_0\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi + V(0)}{ik_0\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi - V(0)}, \quad (12)$$

где  $V(0)$  – значение решения задачи Коши (10), (11) при  $z = 0$ .

Такое соотношение между решениями задачи Коши и коэффициентом отражения позволяет сформулировать следующую задачу оптимального управления.

Пусть  $\bar{R}(k_0)$  – коэффициент отражения, известный (измеренный) для диапазона частотного параметра  $k_0 \in [k_{01}, k_{02}]$  и фиксированного значения угла падения  $\varphi$  зондирующей волны (1). Требуется определить функцию  $\varepsilon(z)$  (оптимальное управление) и решение задачи Коши (10), (11), обеспечивающие минимум функционалу

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{k_{01} - k_{02}} \int_{k_{01}}^{k_{02}} |\bar{R}(k_0) - R(k_0)|^2 dk_0, \quad (13)$$

где  $R(k_0)$  – коэффициент отражения, определяемый по формуле (12).

По аналогии можно сформулировать задачу оптимального управления для позиционного электромагнитного зондирования. В этом случае функционал имеет вид

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |\bar{R}(\varphi) - R(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (14)$$

Рассмотренные задачи по своей формулировке близки к классическим задачам оптимального управления [7]. Однако следует отметить их существенное отличие. Оно состоит в том, что в уравнение (10) и в начальное условие (11) входит частотный параметр  $k_0$  (угол падения  $\varphi$ ) и функционал представляет собой интеграл по этому параметру. Тем не менее, как показано в [8], для задачи (10)–(14) справедлива соответствующая теорема в форме принципа максимума Понтрягина [7]. Однако в данной работе мы не будем использовать эти теоремы для численного решения обратных задач, а воспользуемся другим подходом. Ранее в работе [3] был предложен эффективный численно-аналитический метод решения задач этого типа, когда оптимальное управление  $(\varepsilon(z))$  принадлежит к классу полиномиальных функций. Ниже этот метод применяется для решения задачи (10)–(13) (задача частотного зондирования).

**2. Результаты численных экспериментов.** С помощью разработанных в [2, 3] алгорит-

мов был проведен ряд численных экспериментов по исследованию погрешности восстановления диэлектрической проницаемости слоистой среды при частотном зондировании.

Входные данные обратной задачи частотного зондирования моделировались частотной зависимостью коэффициента отражения  $\bar{R}(k_0)$ , полученной из решения прямой задачи дифракции [2]. В качестве зондирующей волны была выбрана плоская  $E$ -поляризованная волна (1), нормально падающая ( $\varphi = 0$ ) на границу слоистой среды. Все величины размерности длины нормировались на толщину  $h$  неоднородного слоя ( $\bar{z} = z/h$ ,  $\kappa = k_0h$ ). Вне неоднородного слоя относительные диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$ . Как показано выше, исходная обратная задача сведена к задаче оптимального управления (11)–(13). В качестве функционала (13) был выбран его дискретный аналог

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^P |\bar{R}(\kappa_n) - R(\kappa_n)|^2, \quad (15)$$

где  $\kappa_n = k_{0n}h$  – значение нормированного частотного параметра, принадлежащее следующему диапазону  $\kappa_n \in [\kappa_{01}, \kappa_{02}]$ ,  $\kappa_{01} = k_{01}h$ ,  $\kappa_{02} = k_{02}h$ .

Оптимальное управление (диэлектрическая проницаемость  $\bar{\varepsilon}(\bar{z})$ ) разыскивалось в классе полиномиальных функций

$$\bar{\varepsilon}(\bar{z}) = \sum_{p=0}^Q a_p (\bar{z} + 1)^p, \quad Q = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Одной из основных проблем при численном решении задачи оптимального управления является возможная многоэкстремальность функционала (13), который подлежит минимизации. Следствием многоэкстремальности является необходимость многократной минимизации функционала при различных начальных приближениях, для нахождения его глобального минимума, что гарантирует точность аппроксимации входных данных (коэффициента отражения  $\bar{R}(\kappa_n)$ ).

Один из возможных подходов устранения этой проблемы основан на применении критериев селекции моделей [9]. Суть его состоит в следующем. В качестве модели примем полиномиальную аппроксимацию (16) диэлектрической проницаемости, обеспечивающую минимум функционалу (15). Сложность модели определяется параметром  $Q$  – наибольшей степенью полинома (16). Критерий селекции моделей (критерий регулярности [9]) основан на разделении значений частотного параметра  $\kappa$  на обучающую  $(\kappa_n)_{n=1}^{P_A}$  и проверочную  $(\bar{\kappa}_n)_{n=1}^{P_B}$  последовательности. Для

обучающей последовательности отыскиваются коэффициенты  $(a_p)_{p=1}^Q$  модели, обеспечивающей минимум функционалу (15). Все модели различной сложности (различные значения параметра  $Q$ ) селекционируются на проверочной последовательности на основе среднеквадратичной ошибки

$$\Delta(Q) = \frac{\sum_{n=1}^{P_B} |\bar{R}(\bar{\kappa}_n) - R(\bar{\kappa}_n)|^2}{\sum_{n=1}^{P_B} |\bar{R}(\bar{\kappa}_n)|^2}. \quad (17)$$

Модель, для которой величина  $\Delta(Q)$  достигает минимума, является оптимальной моделью – решением обратной задачи частотного зондирования.

Поскольку значения частотного параметра проверочной последовательности не участвуют в получении оценок коэффициентов модели, то критерий селекции является внешним дополнением, позволяющим выбрать однозначно оптимальную модель [9]. Изложенный подход к селекции полиномиальных моделей был реализован в виде соответствующих алгоритмов и программ. На рис. 2–5 представлены результаты расчетов, характеризующие работоспособность разработанных алгоритмов.

Вычислительные эксперименты были проведены для следующего профиля диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(\bar{z}) = 1 + 9(\bar{z} + 0,5)^2(\bar{z} + 2,5) + \lg(\bar{z} + 26) + i15((\bar{z} + 0,5)^3 + 0,15), \quad -1 \leq \bar{z} \leq 0, \quad \bar{z} = z/h.$$

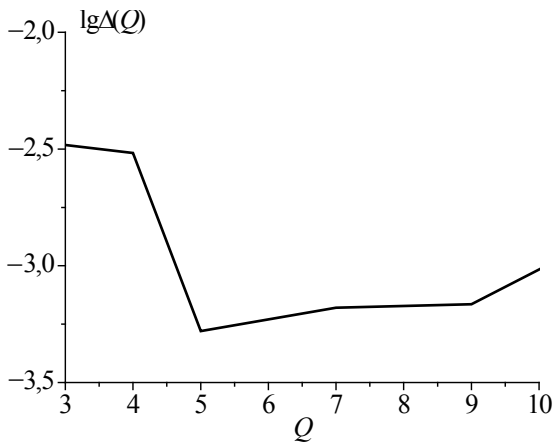


Рис. 2. График зависимости  $\Delta(Q)$  от параметра сложности модели  $Q$

С целью проверки предложенного критерия селекции были выбраны обучающая последовательность частотного параметра  $\kappa_n \in [0, 1, 3]$  и проверочная последовательность  $\kappa_n \in [4, 5]$ .

На рис. 2 показана зависимость среднеквадратичной ошибки  $\Delta(Q)$  от параметра  $Q$  – сложности модели. Очевидно, что эта зависимость имеет ярко выраженный минимум при  $Q = 5$ . Восстановленные профили реальной и мнимой частей диэлектрической проницаемости для оптимальной модели с «графической» точностью совпадают с точными профилями (рис. 3). Более полная информация о возможности восстановления комплексной диэлектрической проницаемости представлена на рис. 4, где приведены зависимости относительных ошибок восстановления реальной и мнимой частей диэлектрической проницаемости:

$$\text{Re}\Delta_1(\bar{z}) = 100 |(\text{Re}(\varepsilon(\bar{z})) - \text{Re}(\bar{\varepsilon}(\bar{z}))) / \text{Re}(\varepsilon(\bar{z}))|,$$

$$\text{Im}\Delta_1(\bar{z}) = 100 |(\text{Im}(\varepsilon(\bar{z})) - \text{Im}(\bar{\varepsilon}(\bar{z}))) / \text{Im}(\varepsilon(\bar{z}))|.$$

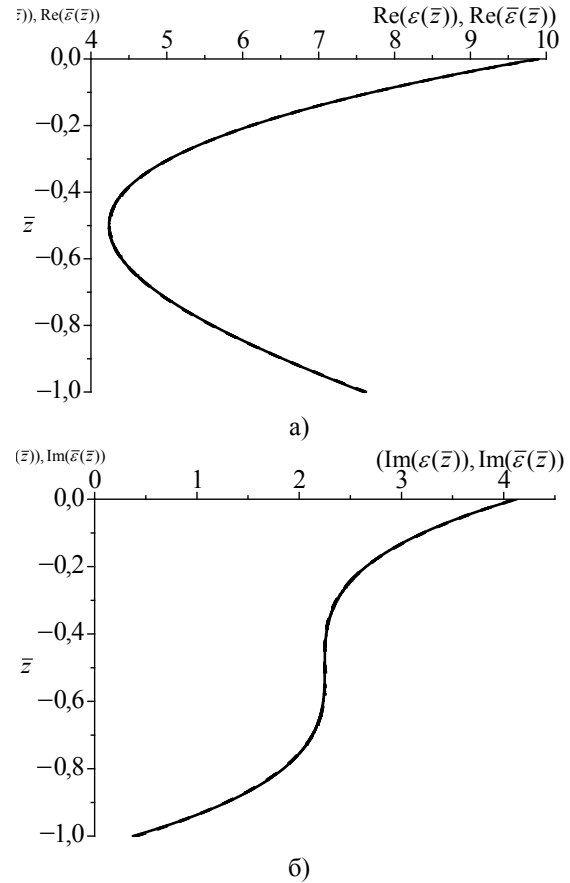


Рис. 3. Диэлектрическая проницаемость неоднородного слоя (— — точный профиль  $\varepsilon(\bar{z})$ , - - - - восстановленный профиль  $\bar{\varepsilon}(\bar{z})$ ): а) реальная часть; б) мнимая часть

Анализ этой ошибки позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, относительная ошибка восстановления не превышает 1% практически во всем диапазоне изменения переменной  $\bar{z}$ , исключая малые окрестности границ интервала  $-1 \leq \bar{z} \leq 0$ . Во-вторых, наибольшая погрешность восстановления имеет место в окрест-

ности границ этого интервала. Причем величина этой погрешности может достигать 8 % для мнимой части диэлектрической проницаемости. Такое поведение относительной ошибки восстановления характерно для всех рассмотренных профилей диэлектрической проницаемостей.

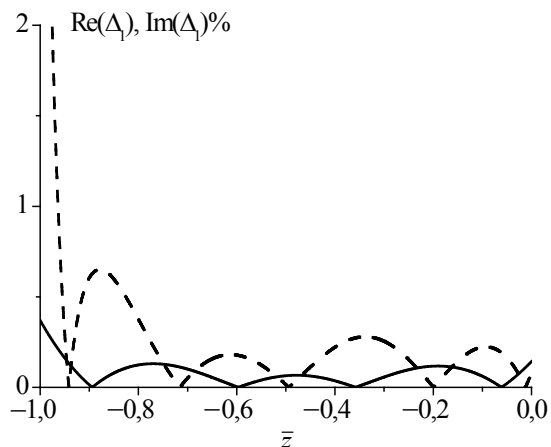


Рис. 4. Относительная погрешность восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного слоя: — — — — реальная часть, — — — — мнимая часть

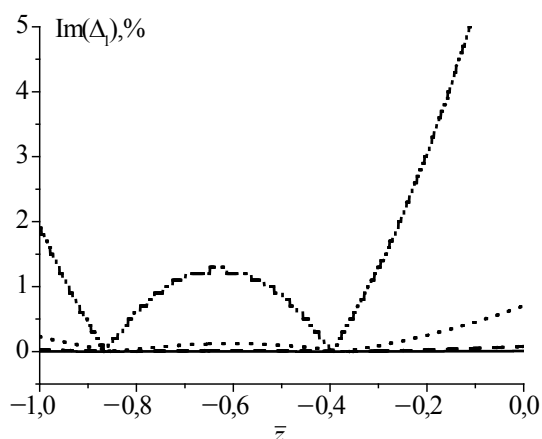


Рис. 5. Относительная погрешность восстановления мнимой части диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\bar{z}) = \varepsilon_R(\bar{z}) + i10^{-n}$ : — — — —  $n = 1$ , — — — —  $n = 2$ , — — — —  $n = 3$ , — — — —  $n = 4$

Рассмотрим, как влияет величина мнимой части диэлектрической проницаемости на относительную ошибку восстановления. Исследуем этот вопрос на примере, когда комплексная диэлектрическая проницаемость слоя имеет вид

$$\varepsilon(\bar{z}) = \varepsilon_{Re}(\bar{z}) + i10^{-n}, \quad \varepsilon_{Re}(\bar{z}) > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Результаты расчетов указывают на то, что с уменьшением мнимой части диэлектрической проницаемости относительная ошибка восстановления возрастает. Обратимся к рис. 5, где представлены результаты, иллюстрирующие этот вывод.

Так, уже при  $\text{Im} \varepsilon \sim 10^{-4}$  относительная ошибка может достигать 8 %. С увеличением мнимой части наблюдается обратная тенденция: относительная ошибка резко уменьшается.

Численные расчеты показывают, что такая закономерность изменения относительной ошибки восстановления имеет место и в общем случае, когда мнимая часть диэлектрической проницаемости изменяется по толщине слоя. Как показывают результаты, приведенные на рис. 3, б и 4, мнимая часть диэлектрической проницаемости в окрестности  $\bar{z} = -1$  меньше, чем при  $\bar{z} = 0$ . Следовательно, погрешность восстановления больше при  $\bar{z} = -1$ , чем при  $\bar{z} = 0$  (рис. 4).

**Выводы.** Исходные обратные задачи электромагнитного зондирования слоистых сред сведены к задачам оптимального управления для уравнения Риккати. Предложен критерий отбора оптимальных полиномиальных моделей, аппроксимирующих комплексную диэлектрическую проницаемость слоистой среды. Проведен анализ относительных ошибок восстановления комплексной диэлектрической проницаемости. Разработанные алгоритмы позволяют восстанавливать комплексную диэлектрическую проницаемость слоистой среды с приемлемой для практических приложений точностью.

#### Библиографический список

1. Тихонравов А. В. Новые методы многослойной оптики / А. В. Тихонравов, М. К. Трубецков // Радиотехника и электроника. – 2005. – 50, № 2. – С. 265–272.
2. Численно-аналитический метод решения задач дифракции волн на слоисто-неоднородных средах / А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук // Физические основы приборостроения. – 2013. – 2, № 1. – С. 34–47.
3. Численно-аналитический метод решения обратных задач дифракции волн на неоднородном слое / А. В. Бровенко, А. А. Вертий, Н. П. Мележик и др. // Радиофизики и электрон. – 2015. – 6(20), № 1. – С. 13–25.
4. Дмитриев В. И. Развитие математических методов исследования прямых и обратных задач электродинамики / В. И. Дмитриев, А. С. Ильинский, А. Г. Свешников // Успехи мат. наук. – 1976. – 31, № 6. – С. 123–141.
5. Newton R. G. Inversion of reflection data for layered media: a review of exact methods / R. G. Newton // Geophys. J. R. Astr. Soc. – 1981. – 65. – P. 191–215.
6. Хруслов Е. Я. Одномерные обратные задачи электродинамики / Е. Я. Хруслов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1985. – 25, № 4. – С. 548–561.
7. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
8. Свешников А. Г. Математические методы в задачах анализа и синтеза слоистых сред / А. Г. Свешников, А. В. Тихонравов // Мат. моделирование – 1989. – 1, № 7. – С. 13–38.
9. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем / А. Г. Ивахненко. – К.: Наук. думка, 1981. – 296 с.

Рукопись поступила 09.11.2015.

A. V. Brovenko, A. A. Vertii, N. P. Melezhik,  
P. N. Melezhik, A. Ye. Poyedinchuk

ONE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEMS  
OF ELECTROMAGNETIC PROBING  
STRATIFIED DIELECTRIC MEDIA

The problem of permittivity profile reconstruction from reflection coefficient data for a stratified dielectric medium illuminated with a probing plane electromagnetic wave at a finite set of frequencies is considered to deal with a topical problem in the context of the development of state-of-the-art nondestructive methods of testing. The initial problem is reduced to the search of an optimal control (permittivity profile) of the Cauchy problem for the Riccati equation. The optimal control is treated in the class of polynomial functions and is based on the minimization of a relevant functional. A criterion is suggested for choosing polynomial approximations to the permittivity profile, which separates input data sets between training and test sequences of probing frequencies. Error analysis made for the reconstruction of the permittivity imaginary part in a stratified medium shows that the relative error of the reconstruction does not exceed 10 % when the permittivity imaginary part is small ( $\text{Im}\varepsilon \sim 10^{-4}$ ) and it is under 1 % when the permittivity imaginary part is large ( $\text{Im}\varepsilon \geq 0.1$ ). The developed algorithms can reconstruct the complex permittivity in a stratified medium to accuracy appropriate for practical applications.

**Key words:** inverse problem, reflection coefficient, permittivity profile, stratified medium.

А. В. Бровенко, О. О. Вертій, М. П. Мележик,  
П. М. Мележик, А. Ю. Поєдинчук

ОДНОВИМІРНІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ  
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ЗОНДУВАННЯ  
ШАРУВАТИХ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ

Задача про відновлення профілю діелектричної проникності шаруватого діелектричного середовища за значеннями коефіцієнта відбиття для кінцевого числа частот зондуючої плоскої електромагнітної хвилі є актуальною у зв'язку з розробкою сучасних методів неруйнівного контролю. Для її розв'язання первинні задачі зведено до пошуку оптимального керування (профілю діелектричної проникності) задачі Коші для рівняння Ріккати. Побудова оптимального керування в класі поліноміальних функцій засновано на мінімізації відповідного функціоналу. Запропоновано критерій відбору поліноміальних апроксимацій профілю діелектричної проникності, який використовує розділення вхідних даних на навчальну і перевірочну послідовності зондуючих частот. Проведено аналіз похибки відновлення уявної частини діелектричної проникності шаруватого середовища. Встановлено, що відносна похибка відновлення малої уявної частини діелектричної проникності ( $\text{Im}\varepsilon \sim 10^{-4}$ ) не перевищує 10 %, а великої ( $\text{Im}\varepsilon \geq 0,1$ ) – становить менше 1 %.

**Ключові слова:** обернена задача, коефіцієнт відбиття, профіль діелектричної проникності, шарувате середовище.