

Ю. О. Аверков, Ю. В. Прокопенко, В. М. Яковенко

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: [yuriyaverkov@gmail.com](mailto:yuriyaverkov@gmail.com)

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ТРУБЧАТОГО ПУЧКА С СОБСТВЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

В последнее время большое внимание уделяется вопросам генерирования электромагнитных колебаний на основе взаимодействия потоков заряженных частиц со структурами, содержащими диэлектрические и плазмopodobные среды. Это связано с достаточно высокой эффективностью преобразования кинетической энергии пучка в электромагнитное излучение. Имеющиеся на сегодняшний день теоретические результаты позволяют лишь качественно описывать эксперименты, поэтому представляется важным дать детальное описание подобных эффектов, максимально приближенное к условиям реального эксперимента. В настоящей работе выполнено подробное теоретическое исследование эффекта неустойчивости нерелятивистского бесконечно тонкого трубчатого электронного пучка, движущегося в вакууме над диэлектрическим цилиндром. Показано, что в зависимости от величины зазора (прицельного расстояния) между пучком и диэлектриком в системе реализуется либо черенковский механизм неустойчивости, либо механизм, обусловленный аномальным эффектом Доплера. Ил. 7. Библиогр.: 13 назв.

**Ключевые слова:** электронный пучок, волна пространственного заряда, пучковая неустойчивость, инкремент неустойчивости, эффект Вавилова–Черенкова, аномальный эффект Доплера.

С момента создания усилителя с бегущей волной в 1940-х гг. Р. Компфнером [1] вопросам преобразования кинетической энергии потоков заряженных частиц в электромагнитное излучение посвящено большое число теоретических и экспериментальных работ (см., например, [2–6] и цитированную там литературу).

В работе [7] было экспериментально зарегистрировано излучение электромагнитных волн в автоколебательной системе на базе высокочастотного квазиоптического диэлектрического резонатора, возбуждаемого многоструйным релятивистским электронным пучком. Возникновение обнаруженного излучения связано с возбуждением собственных колебаний (типа «шепчущей галереи») цилиндрического диэлектрического резонатора потоком заряженных частиц. Теоретическое описание явлений, приводящих к возникновению обнаруженного в работе [7] излучения, представляет собой довольно трудную задачу. Поэтому, с нашей точки зрения, представляется правильным использовать упрощенные физические модели рассмотренной в [7] электродинамической системы, позволяющие, однако, дать количественные описания физических явлений, максимально приближенные к условиям реального эксперимента.

Наиболее простой физической моделью рассмотренной в работе [7] электродинамической системы является тонкий трубчатый электронный пучок, движущийся вдоль бесконечно длинного диэлектрического цилиндра. С помощью такой модели в работе [8] в электростатическом приближении получено дисперсионное уравнение связанных колебаний системы «плазменный цилиндр – пучок». Было показано, в частности, что величины инкрементов возбуждаемых мод имеют наибольшие значения для нулевого значения ази-

мутального волнового числа, а по мере роста этого числа наибольшие величины инкрементов возбуждаемых мод убывают.

В настоящей работе рассматривается взаимодействие трубчатого потока заряженных частиц с собственными электромагнитными волнами диэлектрического цилиндра. Это означает, что, в отличие от работы [8], в диэлектрике учитывается эффект запаздывания полей. Такой учет позволил исследовать инкременты неустойчивости собственных мод диэлектрического цилиндра с различными азимутальными и радиальными модовыми индексами [9].

**1. Постановка задачи, основные уравнения и граничные условия.** Пусть диэлектрический цилиндр с радиусом  $\rho_0$  занимает область пространства  $0 \leq \rho \leq \rho_0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  и  $-\infty \leq z \leq +\infty$  (рис. 1).



Рис. 1. Геометрия структуры

Цилиндр изготовлен из изотропного немагнитного материала, диэлектрическая проницаемость которого является действительной величиной и равна  $\varepsilon$ . На расстоянии  $\rho_b$  от оси цилиндра в вакууме движется трубчатый поток электронов с радиальной толщиной  $a$  и плотностью  $N_0(\rho)$ . Электроны движутся со скоростью  $v_0$ . Предполагается, что заряд электронов компенсируется положительным фоном заряжен-

ных частиц, а толщина потока  $a$  мала по сравнению с другими пространственными масштабами электродинамической системы. Следовательно, равновесную плотность электронов в трубчатом пучке можно представить в виде  $N_0(\rho) = N_0 a \delta(\rho - \rho_b)$ , где  $N_0$  – равновесная концентрация электронов пучка;  $\delta(\rho - \rho_b)$  – дельта-функция Дирака. В линеаризованном виде возмущенная плотность тока пучка в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  в момент времени  $t$  имеет вид

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = eN_0(\rho)\vec{v}(\vec{r}, t) + e\vec{v}_0 N(\vec{r}, t),$$

где  $e$  – заряд электрона;  $N(\vec{r}, t)$  и  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  – переменные составляющие плотности и скорости электронов пучка. В дальнейшем радиальную компоненту плотности тока пучка полагаем равной нулю в силу выбранной модели бесконечно тонкого пучка.

Система уравнений, описывающая взаимодействие электронного пучка с собственными колебаниями диэлектрического цилиндра, представляет собой уравнения Максвелла, дополненные линеаризованными уравнениями непрерывности и движения для электронов пучка:

$$\text{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t); \quad (1)$$

$$\text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}(\vec{r}, t) = 0; \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = 4\pi e N(\vec{r}, t); \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{H}(\vec{r}, t) = 0, \quad (4)$$

$$e \frac{\partial N(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0;$$

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial z} = \frac{e}{m} \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} [\vec{v}_0, \vec{H}(\vec{r}, t)] \right),$$

где  $m$  – масса электрона;  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  – напряженность магнитного поля; вектор индукции электрического поля  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  связан с вектором напряженности  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  материальным уравнением

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \hat{\varepsilon}(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}, t),$$

$\hat{\varepsilon}(t-t')$  – функция влияния, характеризующая эффективность передачи действия поля во времени. В отсутствие частотной дисперсии среды имеем  $\hat{\varepsilon}(t-t') = \varepsilon \delta(t-t')$ .

Для нахождения дисперсионного уравнения колебаний в рассматриваемой системе необходимо воспользоваться граничными условиями для электрических и магнитных полей при  $\rho = \rho_0$  и  $\rho = \rho_b$ . Эти условия следующие: при  $\rho = \rho_0$  непрерывны тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей (так же, как и нор-

мальные составляющие электрической и магнитной индукций), а при  $\rho = \rho_b$  тангенциальные составляющие магнитного поля, в отличие от тангенциальных составляющих электрического поля, терпят разрыв, вызванный возмущенным током пучка. Заметим, что при  $\rho = \rho_b$  нормальная составляющая магнитной индукции остается непрерывной, а нормальная компонента электрической индукции также терпит разрыв, вызванный возмущенным зарядом пучка.

Условия разрыва тангенциальных компонент магнитного поля и нормальной компоненты электрической индукции (в вакууме  $D_\rho(\vec{r}, t) \equiv E_\rho(\vec{r}, t)$ ) получаются путем интегрирования (1) и (3) по бесконечно малой толщине пучка. Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} H_\phi(\vec{r}, t) \Big|_{\rho=\rho_b+0} - H_\phi(\vec{r}, t) \Big|_{\rho=\rho_b-0} &= \\ &= \frac{4\pi}{c\rho_b} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b-\Delta\rho}^{\rho_b+\Delta\rho} j_z(\vec{r}, t) \rho d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_z(\vec{r}, t) \Big|_{\rho=\rho_b+0} - H_z(\vec{r}, t) \Big|_{\rho=\rho_b-0} &= \\ &= -\frac{4\pi}{c} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b-\Delta\rho}^{\rho_b+\Delta\rho} j_\phi(\vec{r}, t) d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\rho(\vec{r}, t) \Big|_{\rho=\rho_b+0} - E_\rho(\vec{r}, t) \Big|_{\rho=\rho_b-0} &= \\ &= \frac{4\pi e}{\rho_b} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b-\Delta\rho}^{\rho_b+\Delta\rho} N(\vec{r}, t) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Представим все переменные величины в виде набора пространственно-временных гармоник, например:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(\rho, q_z, \omega) \times \\ &\times \exp[i(q_z z + n\phi - \omega t)] dq_z d\omega, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\omega$ ,  $q_z$  и  $n$  – частота, продольное волновое число и номер пространственной гармоники (совпадающий с азимутальным модовым индексом) волны соответственно.

С учетом (5) исходные уравнения (1)–(4) вне электронного пучка ( $\rho \neq \rho_b$ ) для аксиальных спектральных составляющих поля приобретают вид

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \left( q_v^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right] \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho, q_z, \omega) \\ H_{zn}(\rho, q_z, \omega) \end{Bmatrix} = 0, \quad (6)$$

где  $\nu = 1, 2$ ;  $q_\nu^2 = \varepsilon_\nu \omega^2 / c^2 - q_z^2$  – квадрат поперечного волнового числа электромагнитных волн;  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  (цилиндр) и  $\varepsilon_2 = 1$  (вакуум). Когда  $q_\nu^2 > 0$ ,

выражения (6) имеют вид уравнений Бесселя, а при  $q_z^2 < 0$  – модифицированных уравнений Бесселя. В нашем случае  $q_z^2 < 0$ , так как для волн, создаваемых заряженными частицами, имеем

$q_z = \omega / v_0$  и  $\omega^2 / c^2 \ll q_z^2$ , так как  $v_0 \ll c$ . Следовательно, вне трубчатого электронного пучка спектральные составляющие электромагнитного поля  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  и  $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  имеют вид

$$E_{zn}(\rho, q_z, \omega) = \begin{cases} \begin{cases} A_n^E J_n(q_1 \rho), & q_1^2 > 0, \\ A_n^E I_n(|q_1| \rho), & q_1^2 < 0, \end{cases} & \rho \leq \rho_0, \\ B_n^E K_n(|q_2| \rho) + C_n^E I_n(|q_2| \rho), & \rho_0 < \rho < \rho_b, \\ D_n^E K_n(|q_2| \rho), & \rho > \rho_b, \end{cases}$$

$$H_{zn}(\rho, q_z, \omega) = \begin{cases} \begin{cases} A_n^H J_n(q_1 \rho), & q_1^2 > 0, \\ A_n^H I_n(|q_1| \rho), & q_1^2 < 0, \end{cases} & \rho \leq \rho_0, \\ B_n^H K_n(|q_2| \rho) + C_n^H I_n(|q_2| \rho), & \rho_0 < \rho < \rho_b, \\ D_n^H K_n(|q_2| \rho), & \rho > \rho_b, \end{cases}$$

где  $J_n(u)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода и одноименные модифицированные функции первого  $I_n(u)$  (функция Инфельда) и второго  $K_n(u)$  (функция Макдональда) рода соответственно [10];  $A_n^{E,H}$ ,  $B_n^{E,H}$ ,  $C_n^{E,H}$  и  $D_n^{E,H}$  – произвольные постоянные. Выбор решения обусловлен выполнением условий конечности величин  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  и  $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$ . При  $v_0 < c / \sqrt{\varepsilon}$  выражения для  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  и  $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  компонент поля внутри цилиндра описываются модифицированными функциями Бесселя первого рода, а при  $v_0 > c / \sqrt{\varepsilon}$  – функциями Бесселя. В дальнейшем мы рассмотрим случай, когда  $v_0 > c / \sqrt{\varepsilon}$ . Остальные фурье-компоненты электромагнитных полей в области цилиндра ( $\rho < \rho_0$ ), зазора ( $\rho_0 < \rho < \rho_b$ ) и за пучком ( $\rho > \rho_0$ ) выражаем с помощью уравнений Максвелла через величины  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  и  $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ .

Отметим, что в случае нерелятивистского пучка, когда  $\beta^2 = v_0^2 / c^2 \ll 1$ , но  $\varepsilon \beta^2 > 1$ , компоненты магнитного поля  $\vec{H}_n(\rho, q_z, \omega)$  на поверхности  $\rho = \rho_b$  являются непрерывными. При этом волны пространственного заряда (ВПЗ) через  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  компоненты поля возбуждают собственные электромагнитные волны диэлектрического цилиндра.

Полагая пучок нерелятивистским и соблюдая указанные выше граничные условия на

поверхности цилиндра и электронного пучка, получим следующее дисперсионное уравнение для связанных колебаний цилиндра и пучка:

$$\Delta \left[ (\omega - q_z v_0)^2 - \Gamma(q_z, n) \omega_b^2 \right] = \alpha \omega_b^2, \quad (7)$$

где  $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 N_0 / m}$  – плазменная частота электронов пучка,  $\Gamma(q_z, n)$  – коэффициент депрессии сил пространственного заряда [2]

$$\Gamma(q_z, n) = \frac{a}{\rho_b} \left( n^2 + q_z^2 \rho_b^2 \right) I_n(|q_z| \rho_b) K_n(|q_z| \rho_b) \times \left[ 1 - \frac{I_n(|q_z| \rho_0) K_n(|q_z| \rho_b)}{I_n(|q_z| \rho_b) K_n(|q_z| \rho_0)} \right];$$

$\alpha$  – коэффициент связи пучка с собственными модами цилиндра

$$\alpha = \frac{a}{\rho_b} \left( n^2 + q_z^2 \rho_b^2 \right) \frac{K_n^2(|q_z| \rho_b)}{q_z^2 \rho_0^2 K_n^2(|q_z| \rho_0)} \Delta^H;$$

$$\Delta = \left[ \frac{n\omega(\varepsilon - 1)}{q_z q_1^2 \rho_0^2 c} \right]^2 - \Delta^E \Delta^H;$$

$$\Delta^E = \frac{1}{|q_z| \rho_0} \frac{K_n'(|q_z| \rho_0)}{K_n(|q_z| \rho_0)} + \frac{\varepsilon}{q_1 \rho_0} \frac{J_n'(q_1 \rho_0)}{J_n(q_1 \rho_0)};$$

$$\Delta^H = \frac{1}{|q_z| \rho_0} \frac{K_n'(|q_z| \rho_0)}{K_n(|q_z| \rho_0)} + \frac{1}{q_1 \rho_0} \frac{J_n'(q_1 \rho_0)}{J_n(q_1 \rho_0)}.$$

Заметим, что уравнение (7) приведено к виду, аналогичному характеристическому уравнению ламп бегущей волны [2]. В нашем случае оно описывает взаимодействие ВПЗ пучка с собственными колебаниями цилиндра.

В пределе  $\rho_0 \rightarrow 0$  получаем  $\alpha / \Delta \rightarrow 0$  и дисперсионное уравнение (7) определяет только решения медленной ( $\omega_-$ ) и быстрой ( $\omega_+$ ) ВПЗ

пучка:

$$\omega_- = q_z v_0 - \sqrt{\Gamma_0(q_z, n)} \omega_b; \quad (8)$$

$$\omega_+ = q_z v_0 + \sqrt{\Gamma_0(q_z, n)} \omega_b, \quad (9)$$

где

$$\Gamma_0(q_z, n) = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \Gamma(q_z, n) = \frac{a}{\rho_b} (n^2 + q_z^2 \rho_b^2) \times \\ \times I_n(|q_z| \rho_b) K_n(|q_z| \rho_b).$$

Фазовые скорости медленной и быстрой ВПЗ, как следует из (8) и (9), соответственно меньше и больше скорости пучка  $v_0$ .

Наша задача состоит в том, чтобы найти частоты собственных колебаний цилиндра, а также инкременты (декременты) колебаний системы «цилиндр–пучок». Из дисперсионного уравнения (7) следует, что в отсутствие пучка (при  $\omega_b = 0$ ) это уравнение переходит в дисперсионное уравнение собственных колебаний цилиндра  $\Delta = 0$ . Отсюда находится частота собственных колебаний цилиндра  $\omega = \omega_d$ . При прохождении пучка над диэлектрическим цилиндром происходит изменение частоты  $\omega_d$ , т. е. возникают малые добавки  $|\delta\omega| \ll \omega_d$ . Они малы вследствие малости плазменной частоты электронов пучка по сравнению с частотами собственных колебаний диэлектрического цилиндра. Именно этот случай является интересным, так как речь идет о раскачке собственных колебаний диэлектрического цилиндра. Тогда уравнение (7) можно представить следующим образом:

$$\delta\omega^3 + 2(\omega_d - q_z v_0) \delta\omega^2 + [(\omega_d - q_z v_0)^2 - \\ - \Gamma(q_z, n) \omega_b^2] \delta\omega - \frac{\alpha(\omega_d)}{\Delta'_\omega(\omega_d)} \omega_b^2 = 0, \quad (10)$$

где  $\Delta'_\omega(\omega_d)$  – производная от величины  $\Delta$  по частоте, вычисленная на резонансной частоте  $\omega_d$ . Наибольший интерес представляет случай резонансов. Если скорость электрона  $v_0$  удовлетворяет условию  $q_z v_0 = \omega_d$  и  $\Gamma(q_z, n) = 0$  (резонанс Вавилова–Черенкова [11]), то из (10) получаем

$$\delta\omega^3 = \frac{\alpha(\omega_d)}{\Delta'_\omega(\omega_d)} \omega_b^2. \quad (11)$$

Такой случай реализуется при  $\rho_b = \rho_0$ . Если  $\rho_b \neq \rho_0$ , то формула (11) остается справедливой при выполнении условия

$$\sqrt{\Gamma(q_z, n)} \omega_b \ll |\delta\omega|. \quad (12)$$

Уравнение (11) имеет три корня, один из которых действительный, а два других – комплексно сопряженные. Один из комплексно сопряженных корней имеет положительную мнимую часть, что приводит к нарастанию амплитуды волны со вре-

менем. Корень с отрицательной мнимой частью соответствует затухающей со временем волне [12]. Из (11) находим следующее выражение для инкремента неустойчивости:

$$\text{Im } \delta\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{\alpha(\omega_d)}{\Delta'_\omega(\omega_d)} \right|^{1/3} \omega_b^{2/3}. \quad (13)$$

Выражение (13) определяет максимальный инкремент неустойчивости, пропорциональный  $N_0^{1/3}$ . Эта неустойчивость, как было отмечено выше, связана с эффектом Вавилова–Черенкова.

Отметим, что при  $\rho_b > \rho_0$  возможен резонанс, когда

$$\omega_{d\pm} = q_z v_0 \pm \sqrt{\Gamma(q_z, n)} \omega_b.$$

При выполнении условия

$$\sqrt{\Gamma(q_z, n)} \omega_b \gg |\delta\omega| \quad (14)$$

уравнение (10) приобретает вид

$$\delta\omega^2 = \pm \frac{\alpha(\omega_{d\pm}) \omega_b}{2\sqrt{\Gamma(q_z, n)} \Delta'_\omega(\omega_{d\pm})}. \quad (15)$$

В нем знак «+» перед дробью соответствует частоте  $\omega_{d+}$ , а знак «-» – частоте  $\omega_{d-}$ . Видно, что  $\delta\omega^2 < 0$  только при  $\omega = \omega_{d-}$ . Это означает, что неустойчивость возникает только при взаимодействии медленной ВПЗ с собственными модами цилиндра (аномальный эффект Доплера [11]). Взаимодействие быстрой ВПЗ с собственными модами цилиндра приводит лишь к возникновению действительных поправок к частоте  $\omega = \omega_{d+}$ . Таким образом, уравнение (15) при  $\omega = \omega_{d+}$  имеет два действительных, а при  $\omega = \omega_{d-}$  – два комплексно сопряженных корня. Корень с положительной мнимой частью соответствует волне, нарастающей со временем.

Из (15) получаем следующее выражение для инкремента:

$$\text{Im } \delta\omega = \left[ \frac{\alpha(\omega_{d-}) \omega_b}{2\sqrt{\Gamma(q_z, n)} \Delta'_\omega(\omega_{d-})} \right]^{1/2}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что при выполнении условия (14) инкремент неустойчивости пропорционален  $N_0^{1/4}$ .

Для более глубокого понимания механизма взаимодействия заряженных частиц трубчатого потока с колебаниями диэлектрического цилиндра приведем результаты численного анализа дисперсионного уравнения (7) и выражений для инкрементов неустойчивости (13) и (16).

**2. Численный анализ дисперсионного уравнения.** Численный анализ дисперсионного уравнения (7) удобно проводить, используя следующие безразмерные величины:

$$\bar{q}_z = q_z \rho_0, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \bar{\rho}_b = \frac{\rho_b}{\rho_0},$$

где  $\omega_0 = c/\rho_0$ . В качестве материала диэлектрического цилиндра выберем поликор с  $\varepsilon = 9,6$ , а радиус цилиндра  $\rho_0 = 0,5$  см. Значения равновесной концентрации электронов пучка  $N_0$ , толщины стенки пучка  $a$  и скорости направленного движения электронов пучка  $v_0$  выберем следующими:  $N_0 = 5,9 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup>,  $a = 0,5$  см и  $v_0 = 0,387 c$  соответственно. Для выбранных параметров системы имеем  $\omega_0 \approx 1,37 \cdot 10^{10}$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_b^2/\omega_0^2 \approx 0,05$ , а значению  $\bar{q}_z = 1$  соответствуют  $q_z = 2$  см<sup>-1</sup> и длина волны  $\lambda = 2\pi/q_z = \pi$  см.

На рис. 2, а для  $\bar{\rho}_b = 1,2$  приведены дисперсионные зависимости собственных симметричных мод ( $n=0$ ) диэлектрического цилиндра, представляющие решения уравнения  $\Delta = 0$ . Штриховые прямые 1 и 2 соответствуют медленной и быстрой ВПЗ. Видно, что кривые медленной и быстрой ВПЗ начинаются при  $\bar{q}_z = 0$  и  $\bar{\omega} = 0$ .

Из рисунка видно, что нижние границы частотных спектров симметричных мод цилиндра, отличающихся радиальным индексом  $s$ , определяются частотами отсечек при  $\bar{q}_z = 0$ . Из каждой точки начала спектра выходит пара дисперсионных кривых. Нижние кривые в таких парах соответствуют  $H$ -волнам, спектр которых получается из решения дисперсионного уравнения  $\Delta^H = 0$ , а

верхние кривые –  $E$ -волнам, которые являются решениями уравнения  $\Delta^E = 0$ . Отметим, что при  $n=0$  дисперсионное уравнение  $\Delta = 0$  распадается на два независимых уравнения:  $\Delta^E = 0$  и  $\Delta^H = 0$ . Радиальный модовый индекс  $s$  определяется порядковым номером корня соответствующего дисперсионного уравнения и соответствует количеству вариаций поля вдоль радиальной координаты [9]. Составляющие электромагнитного поля  $E$ -волн имеют три компоненты –  $E_{\rho ns}$ ,  $H_{\phi ns}$  и  $E_{z ns}$ , а  $H$ -волн –  $H_{\rho ns}$ ,  $E_{\phi ns}$  и  $H_{z ns}$ . Особый интерес представляют точки пересечения прямых 1 и 2 с ветвями собственных  $E$ -мод цилиндра, которые на рис. 2, а показаны пустыми кружками. В этих точках выполняется условие фазового синхронизма ВПЗ и собственных мод цилиндра.

На рис. 2, б представлены зависимости частот связанных ВПЗ с собственными симметричными модами ( $n=0$ ) диэлектрического цилиндра при  $\bar{\rho}_b = 1,2$ . На рис. 2, б прямая 1 соответствует световой линии в диэлектрике  $\bar{\omega} = \bar{q}_z/\sqrt{\varepsilon}$  и, соответственно, кривые: 2 – ветвь медленной ВПЗ; 3 – ветвь  $H_{01}$ -волны; 4 – ветвь быстрой ВПЗ; 5 – ветвь  $E_{01}$ -волны. Символами  $A$  и  $B$  (на вставке) обозначены области неустойчивости связанной медленной ВПЗ с  $E_{01}$ -волной и пересечения ветвей медленной ВПЗ и  $H_{01}$ -волны цилиндра соответственно.

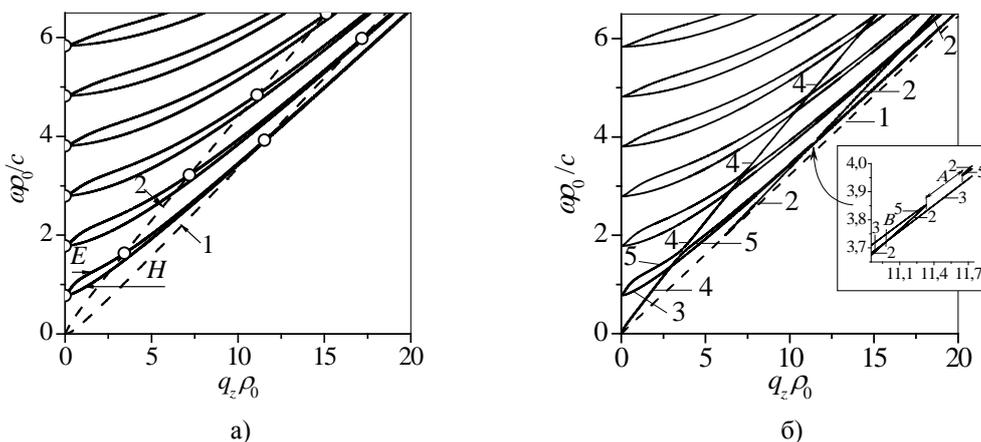


Рис. 2. Графики зависимостей частот собственных симметричных мод диэлектрического цилиндра (а) и связанных ВПЗ с собственными волнами цилиндра (б) от величины продольного волнового числа

Из рисунка видно, что связанные волны возникают только при взаимодействии быстрой и медленной ВПЗ с собственными  $E_{0s}$ -волнами (т. е. с модами  $E$ -типа) диэлектрического цилиндра. Действительно, дисперсионные кривые быстрой и медленной ВПЗ пересекаются с дисперсионными кривыми собственных  $H_{0s}$ -волн (т. е. с модами

$H$ -типа), что свидетельствует об отсутствии их взаимодействия. Взаимодействие быстрой ВПЗ с собственными  $E_{0s}$ -волнами цилиндра приводит лишь к «расталкиванию» кривых, что свидетельствует об отсутствии неустойчивости.

Качественно иным образом ведут себя дисперсионные кривые в окрестностях областей

взаимодействия медленной ВПЗ (ветвь 2) с собственными  $E_{0s}$ -волнами цилиндра (вставка на рис. 2, б). Видно, что в этих областях возникают разрывы дисперсионных кривых взаимодействующих волн (см. область  $A$  на вставке к рис. 2, б), отображающие комплексные решения относительно частот дисперсионного уравнения (7) и соответствующие конвективным неустойчивостям [12]. Как отмечено выше, одно из этих решений соответствует затухающим во времени полям, а другое – нарастающим. В областях такого взаимодействия возникают неустойчивые связанные волны с фазовыми скоростями меньше скорости электронов пучка. Естественно, с ростом амплитуд связанных медленных ВПЗ с собственными модами цилиндра проявляются нелинейные эффекты, которые приводят к установлению стационарного режима [13].

На рис. 3 представлены дисперсионные зависимости собственных мод цилиндра с азимутальным индексом  $n = 10$  при  $\bar{\rho}_b = 1,2$  и связанных волн, возникающих при взаимодействии полей электронного пучка и собственных мод диэлектрического цилиндра. Рассматриваемые собственные моды цилиндра относятся к модам «шепчущей галереи», представляющим большую практический интерес [9]. Отметим, что электромагнитные поля мод цилиндра с  $n \neq 0$  содержат все шесть компонент, за исключением аксиально-однородных мод, у которых  $\bar{q}_z = 0$ . Нижние ветви каждой пары дисперсионных зависимостей цилиндра, объединенные частотой отсечки, соответствуют частотам собственных  $EH_{10s}$ -мод (т. е. мод  $H$ -типа), а верхние –  $HE_{10s}$ -мод ( $E$ -типа). (Мы используем классификацию мод, принятую в работе [9].) Из рисунка видно, что при  $\bar{q}_z = 0$  частота отсечки спектров  $EH_{101}$ - и  $HE_{101}$ -мод равна нулю.

На рис. 3, а штриховые кривые 1 и 2 соответствуют медленной и быстрой ВПЗ; эти кривые имеют точки начала спектра вне начала координат. Пустыми кружками показаны точки пересечения ВПЗ с соответствующими собственными модами цилиндра. Точка пересечения кривой 1 и ветви дисперсионной зависимости  $EH_{101}$ -моды (обозначенная на рисунке как  $EH_{101}$ ) заслуживает особого внимания из-за проявления аномального эффекта Доплера. Отметим, что поскольку при  $n \neq 0$  поля всех собственных мод цилиндра имеют отличные от нуля  $E_{zns}$  компоненты, то моды как  $E$ -, так и  $H$ -типа будут взаимодействовать с ВПЗ пучка.

На рис. 3, б прямая 1 соответствует световой линии в диэлектрике  $\bar{\omega} = \bar{q}_z / \sqrt{\epsilon}$  и, соответственно, кривые: 2 – ветвь медленной ВПЗ; 3 – ветвь  $EH_{101}$ -моды; 4 – ветвь быстрой ВПЗ; 5 – ветвь  $HE_{101}$ -моды. Символами  $A$  и  $B$  (на вставках) обозначены области взаимодействия быстрой ВПЗ с собственной  $HE_{101}$ -модой цилиндра и неустойчивости связанной медленной ВПЗ с  $EH_{101}$ -модой цилиндра соответственно.

Из рис 3, б видно, что взаимодействие быстрой ВПЗ с собственными модами цилиндра обоих типов приводит к «расталкиванию» дисперсионных кривых, сопровождающемуся смещениями резонансных частот. В системе возникают устойчивые связанные волны, фазовые скорости которых превышают скорость электронов пучка. Резонансное взаимодействие медленной ВПЗ (ветвь 2) с собственными модами цилиндра приводит к возникновению в системе конвективных неустойчивостей. В результате возникают области разрывов дисперсионных кривых взаимодействующих волн, соответствующих комплексно сопряженным решениям уравнения (15) для  $\omega = \omega_{d-}$ .

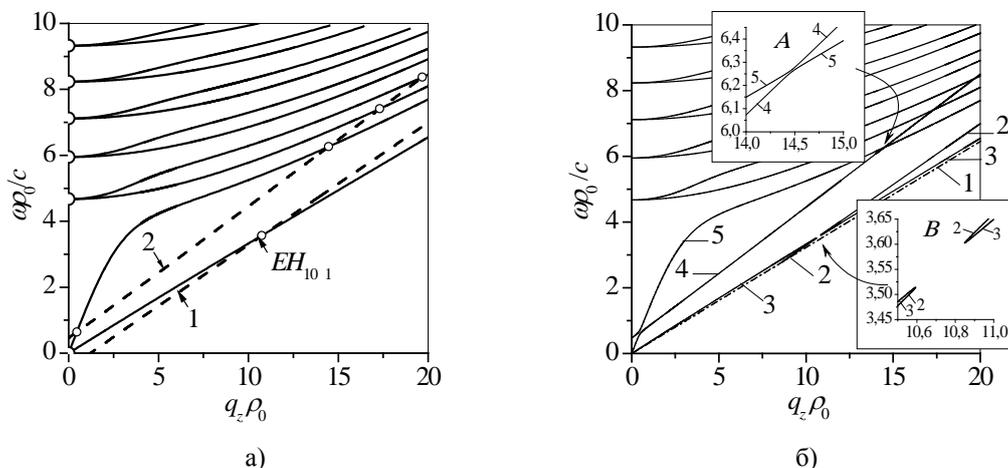


Рис. 3. Графики зависимостей частот собственных мод диэлектрического цилиндра (а) и связанных ВПЗ с собственными  $EH_{10s}$ - и  $HE_{10s}$ -модами цилиндра (б) от величины продольного волнового числа

**3. Численный анализ инкрементов неустойчивости связанных волн.** Рассмотрим вначале зависимости величин инкрементов возбуждаемых волн для предельно малых прицельных расстояний пучка, когда выполняется условие (12). В этом случае, как уже было отмечено выше, неустойчивость системы обусловлена эффектом Вавилова–Черенкова.

На рис. 4 приведены зависимости безразмерного инкремента возбуждаемых  $HE_{n,s}$ -мод от значения азимутального модового индекса  $n$  при  $\bar{\rho}_b = 1$  для первых трех радиальных гармоник ( $s = 1, 2, 3$ ). Кривая 1 соответствует значению  $s = 1$ , кривая 2 – значению  $s = 2$ , кривая 3 – значению  $s = 3$ . Из рисунка видно, что, начиная с  $n = 1$ , приведенные зависимости являются монотонно растущими. С увеличением радиального индекса  $s$  величины инкрементов также увеличиваются для каждого заданного значения  $n$ .

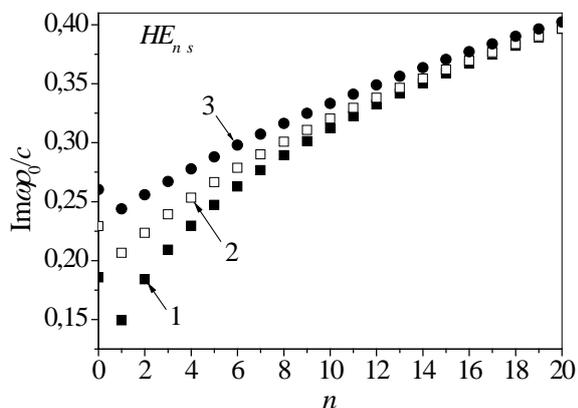


Рис. 4. Графики зависимостей безразмерного инкремента возбуждаемых  $HE_{n,s}$ -мод от индекса  $n$  при  $\bar{\rho}_b = 1$

На рис. 5 приведены зависимости безразмерного инкремента возбуждаемых  $EH_{n,s}$ -мод от значения азимутального модового индекса  $n$  при  $\bar{\rho}_b = 1$  для первых трех радиальных гармоник ( $s = 1; 2; 3$ ). Кривая 1 соответствует значению  $s = 1$ , кривая 2 – значению  $s = 2$ , кривая 3 – значению  $s = 3$ . Видно, что, начиная со значения  $n = 0$ , приведенные зависимости являются монотонно растущими. Инкремент  $EH_{0,s}$ -мод равен нулю, так как квазистатическое поле пучка взаимодействует лишь с полями, имеющими отличную от нуля  $E_z$ -компоненту поля.

Сравнение зависимостей на рис. 4 и 5 показывает, что для каждого заданного значения  $n$  и  $s$  инкременты  $HE_{n,s}$ -мод превышают соответствующие значения инкрементов  $EH_{n,s}$ -мод. Это означает, что возбуждаемые моды «шепчущей галереи» ( $s \geq 10$ ) являются модами  $E$ -типа.

Рассмотрим зависимости величин инкрементов возбуждаемых волн для случая, описы-

ваемого неравенством (14), когда неустойчивость системы обусловлена взаимодействием собственных мод цилиндра с медленными ВПЗ пучка. Для выбранной в настоящей работе концентрации пучка ( $N_0 = 5,9 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ) условие (14) выполняется при  $\bar{\rho}_b \geq 1,2$ .

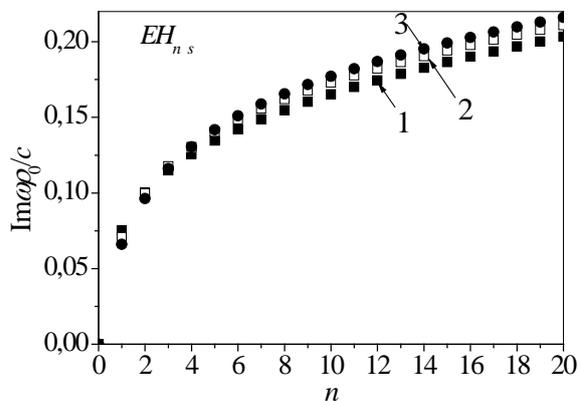


Рис. 5. Графики зависимостей безразмерного инкремента возбуждаемых  $EH_{n,s}$ -мод от индекса  $n$  при  $\bar{\rho}_b = 1$

На рис. 6 приведены зависимости безразмерного инкремента возбуждаемых  $HE_{n,1}$ -мод в различных электродинамических системах, отличающихся значениями величины  $\bar{\rho}_b$ , от значения азимутального индекса  $n$ . Кривая 1 соответствует значению  $\bar{\rho}_b = 1,2$ , кривая 2 – значению  $\bar{\rho}_b = 1,25$ , кривая 3 – значению  $\bar{\rho}_b = 1,3$ . Наибольшее значение инкремента имеет мода с  $n = 1$ , а с ростом  $n$  приведенные зависимости являются монотонно убывающими. Величины инкрементов для каждого заданного значения  $n$  убывают с возрастанием прицельного расстояния пучка (т. е. с увеличением  $\bar{\rho}_b$ ). Численный анализ показывает, что с ростом радиального индекса  $s$  значения инкрементов убывают для каждого заданного значения  $n$  и  $\bar{\rho}_b$ .

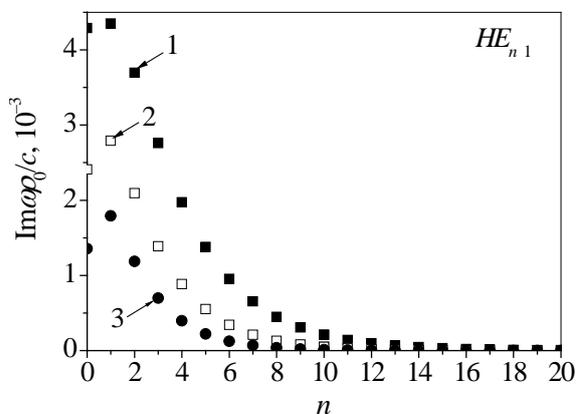


Рис. 6. Графики зависимостей безразмерного инкремента возбуждаемых  $HE_{n,1}$ -мод от индекса  $n$  для ряда значений  $\bar{\rho}_b > 1$

На рис. 7 приведены зависимости безразмерного инкремента возбуждаемых  $EH_{n1}$ -мод от значения азимутального индекса  $n$  для ряда значений  $\bar{\rho}_b$ . Кривая 1 соответствует значению  $\bar{\rho}_b = 1,2$ , кривая 2 – значению  $\bar{\rho}_b = 1,25$ , кривая 3 – значению  $\bar{\rho}_b = 1,3$ . Все зависимости имеют равные нулю значения инкремента при  $n = 0$ , достигают максимума при некотором значении  $n > 0$  и монотонно убывают с дальнейшим ростом  $n$ . Численный расчет показывает, что с ростом радиального индекса  $s$  максимальные значения инкрементов для каждого заданного значения  $\bar{\rho}_b$  убывают и смещаются в сторону меньших значений  $n$ .

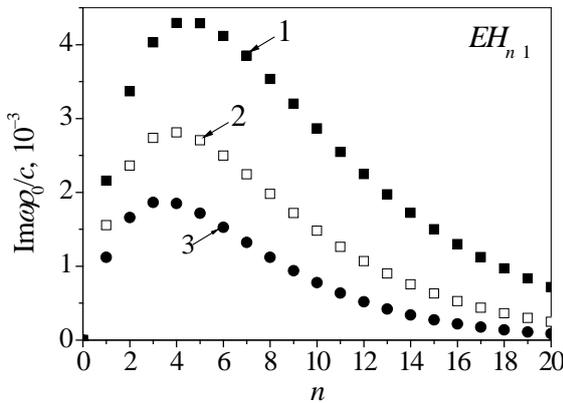


Рис. 7. Графики зависимостей безразмерного инкремента возбуждаемых  $EH_{n1}$ -мод от индекса  $n$  для ряда значений  $\bar{\rho}_b > 1$

Из сравнения зависимостей на рис. 6 и 7 следует, что, например, при  $n \geq 10$  величины инкрементов для  $EH_{n,s}$ -мод значительно превышают соответствующие им величины инкрементов  $HE_{n,s}$ -мод. Поэтому можно сделать вывод, что при выполнении условия (14) возбуждаемые пучком моды «шепчущей галереи» являются модами  $H$ -типа. Объяснение этому обстоятельству можно дать, проанализировав дисперсионное уравнение (7) при  $|q_z| \rho_0 \gg 1$  и  $|q_z| \rho_b \gg 1$ . Такие неравенства оказываются справедливыми при выполнении условия (14). Воспользовавшись асимптотикой входящих в уравнение (7) модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента, получим следующее выражение для коэффициента связи:

$$\alpha \approx \frac{a \Delta^H}{\rho_0} \left( 1 + \frac{n^2}{q_z^2 \rho_b^2} \right) \exp[-2|q_z|(\rho_b - \rho_0)], \quad (17)$$

$$\Delta^H = \frac{1}{q_1 \rho_0} \frac{J'_n(q_1 \rho_0)}{J_n(q_1 \rho_0)} + O\left(\frac{1}{|q_z| \rho_0}\right).$$

Из выражения (17) видно, что при  $|q_z| \rho_0 \gg 1$ ,  $|q_z| \rho_b \gg 1$  и  $|q_z|(\rho_b - \rho_0) \gg 1$  коэффициент связи является экспоненциально малой величи-

ной. В то же время при выполнении условия (14) возбуждаемые моды  $E$ - и  $H$ -типов при  $n \geq 10$  имеют близкие по величине резонансные значения  $q_z$  при одинаковых значениях  $n$ ,  $s$  и  $\rho_b$ . При этом резонансные значения  $q_z$  для  $HE_{n,s}$ -мод превышают соответствующие им резонансные значения  $q_z$  для  $EH_{n,s}$ -мод. Это означает, что коэффициент связи (17) для мод  $E$ -типа меньше, чем для соответствующих мод  $H$ -типа. Поэтому, как следует из выражения (16), инкременты  $HE_{n,s}$ -мод при  $n \geq 10$  оказываются меньше соответствующих им инкрементов  $EH_{n,s}$ -мод. Заметим, что при  $\bar{\rho}_b = 1$  и  $|q_z| \rho_0 \gg 1$  выражение для коэффициента связи не содержит экспоненциально малого множителя.

Следовательно, в условиях сильной связи пучка с собственными модами цилиндра (условие (12)) возбуждаемые моды «шепчущей галереи» являются преимущественно  $E$ -типа, а в условиях слабой связи (условие (14)) –  $H$ -типа.

В заключение приведем результаты численного анализа инкрементов неустойчивости для случаев (12) и (14) при различных величинах отношения  $a/\rho_0$ . Отметим, что при уменьшении отношения  $a/\rho_0$  от 1 до 0,001 описанная выше качественная картина поведения дисперсионных кривых и инкрементов возбуждаемых волн остается неизменной. При выполнении условия (12) с уменьшением отношения  $a/\rho_0$  величины инкрементов убывают для каждой заданной пары значений  $n$  и  $s$ . Например, при уменьшении отношения  $a/\rho_0$  от 1 до 0,1 соответствующие величины инкрементов уменьшаются приблизительно в два раза. Это объясняется уменьшением коэффициента связи  $\alpha$  в выражении для инкремента (13).

Несколько иным образом ведут себя величины инкрементов с уменьшением отношения  $a/\rho_0$  при выполнении условия (14). Так, для возбуждаемых  $HE_{n,s}$ -мод при  $s = 1$  с уменьшением отношения  $a/\rho_0$  от 1 до 0,1 максимальное значение инкремента увеличивается приблизительно в 2 раза, а при последующем уменьшении отношения  $a/\rho_0$  до величины 0,01 максимальное значение инкремента приблизительно в 1,5 раза превышает значение максимального инкремента при  $a/\rho_0 = 1$ . При  $a/\rho_0 = 0,001$  максимальное значение инкремента оказывается меньше, но приблизительно равным максимальному значению инкремента при  $a/\rho_0 = 1$ . Аналогичное поведение величины инкремента в зависимости от величины отношения  $a/\rho_0$  имеет место для возбуждаемых  $EH_{n,s}$ -мод. Такая немонотонная зави-

симось величини максимального інкремента от величини отношения  $a/\rho_0$  объясняется следующим. Уменьшение величины  $a/\rho_0$  приводит к одновременному уменьшению коэффициента депрессии  $\Gamma(q_z, n)$  и коэффициента связи  $\alpha$ . Уменьшение коэффициента депрессии «ослабляет» неравенство (14), что приводит к росту инкремента. В то же время уменьшение коэффициента связи  $\alpha$  приводит к уменьшению инкремента.

**Выводы.** В работе теоретически изучена неустойчивость нерелятивистского бесконечно тонкого трубчатого электронного пучка, движущегося в вакууме над диэлектрическим цилиндром. Показано, что в зависимости от прицельного расстояния между пучком и цилиндром возникающая неустойчивость может быть обусловлена как эффектом Вавилова–Черенкова, так и аномальным эффектом Доплера. Эффект Вавилова–Черенкова приводит к возникновению неустойчивости с инкрементом, пропорциональным  $N_0^{1/3}$  при предельно малых прицельных расстояниях пучка. В этом случае возбуждаемые моды «шепчущей галереи» являются преимущественно  $E$ -типа. Аномальный эффект Доплера приводит к возникновению неустойчивости с инкрементом, пропорциональным  $N_0^{1/4}$  при прицельных расстояниях, превышающих некоторое критическое значение. Возбуждаемые при этом моды «шепчущей» галереи являются преимущественно  $H$ -типа.

#### Библиографический список

1. *Kompfner R.* The invention of the traveling-wave tube / R. Kompfner. – San Francisco: San Francisco Press, 1964. – 30 p.
2. *Вайнштейн Л. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике / Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев. – М.: Сов. радио, 1973. – 400 с.
3. *Трубецков Д. И.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: в 2 т. Т. 1 / Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов. – М.: Физматлит, 2003. – 496 с.
4. *Сотников Г. В.* Электродинамика плазменных и плазмopodobных замедляющих структур для СВЧ-генераторов больших мощностей и высокоградиентных ускорителей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Г. В. Сотников; ННЦ «ХФТИ» НАНУ. – Х., 2007.
5. *Энциклопедия* низкотемпературной плазмы: в 9 т. Т. 4 / под ред. В. Е. Фортова. – М.: Наука, 2000. – 507 с.
6. *Кузелев М. В.* Плазменная релятивистская СВЧ-электроника / М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 544 с.
7. *Автоколебательная система* на основе диэлектрического резонатора с модами «шепчущей галереи» / А. В. Дормидонтов, А. Я. Кириченко, Ю. Ф. Лонин и др. // Письма в журн. техн. физики. – 2012. – 38, вып. 2. – С. 65–73.
8. *Аверков Ю. О.* Неустойчивость трубчатого электронного пучка при взаимодействии с плазмopodobной средой / Ю. О. Аверков, Ю. В. Прокопенко, В. М. Яковенко // Радиофизика и электрон. – 2016. – 7(21), № 2. – С. 28–35.
9. *Квазиоптические твердотельные резонаторы* / А. Я. Кириченко, Ю. В. Прокопенко, Ю. Ф. Филиппов, Н. Т. Черпак. – К.: Наук. думка, 2008. – 286 с.
10. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица,

И. Стиган; пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

11. *Незлин М. В.* Волны с отрицательной энергией и аномальный эффект Доплера / М. В. Незлин // Успехи физ. наук. – 1976. – 120, № 3. – С. 481–495.
12. *Электродинамика плазмы* / Под ред. А. И. Ахиезера. – М.: Наука, 1974. – 720 с.
13. *Файнберг Я. Б.* К нелинейной теории взаимодействия релятивистского пучка с плазмой / Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро // Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. – К.: Изд-во АН УССР, 1965. – С. 92–103.

Рукопись поступила 30.09.2016.

Yu. O. Averkov, Yu. V. Prokopenko,  
V. M. Yakovenko

#### INTERACTION OF A FLOW OF CHARGED PARTICLES WITH EIGENMODES OF A DIELECTRIC CYLINDER

Nowadays a good deal of attention is focused on problems of generating electromagnetic oscillations on the basis of the interaction of charged particles with the structures containing dielectric and plasma-like media. This is due to the sufficiently high efficiency of conversion of the electron beam kinetic energy into electromagnetic radiation. The currently available theoretical results give only qualitative descriptions of experiments. Therefore, it is important to give a detailed description of such effects maximally close to the real conditions of the experiment. In this connection the detailed theoretical study of the instability of the non-relativistic infinitely thin tubular beam of electrons moving in a vacuum above a dielectric cylinder has been performed. It has been shown that either Cherenkov effect or anomalous Doppler effect occurs in relation to the distance (the impact parameter) between the beam and the dielectric.

**Key words:** electron beam, space-charge wave, beam instability, instability increment, Cherenkov effect, anomalous Doppler effect.

Ю. О. Аверков, Ю. В. Прокопенко,  
В. М. Яковенко

#### ВЗАЄМОДІЯ ПОТОКУ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ТРУБЧАТОГО ПУЧКА ІЗ ВЛАСНИМИ КОЛИВАННЯМИ ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ЦИЛІНДРА

Останнім часом велика увага приділяється питанням генерування електромагнітних коливань на основі взаємодії потоків заряджених частинок зі структурами, що містять діелектричні та плазмopodobні середовища. Це пов'язано з досить високою ефективністю перетворення кінетичної енергії пучка в електромагнітне випромінювання. Наявні на цей час теоретичні результати дозволяють лише якісно описувати експерименти, тому є важливим дати детальний опис подібних ефектів, який максимально наближено до умов реального експерименту. У цій роботі виконано докладне теоретичне дослідження ефекту нестійкості нерелятивистського нескінченно тонкого трубчатого электронного пучка, що рухається у вакуумі над діелектричним циліндром. Показано, що залежно від величини зазору (прицільної відстані) між пучком і діелектриком у системі реалізується або черенковський механізм нестійкості, або механізм, обумовлений аномальним ефектом Доплера.

**Ключові слова:** електронний пучок, хвиля просторового заряду, пучкова нестійкість, інкремент нестійкості, ефект Вавилова–Черенкова, аномальний ефект Доплера.