

А. М. Стадник, А. О. Силин*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины**12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина*E-mail: ostadnyk@ire.kharkov.ua

ФОКУСИРОВКА ИЗЛУЧЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ ЛИНЗОЙ ПЕНДРИ

Концепция плоской линзы впервые была рассмотрена в работе В. Г. Веселаго, посвященной распространению электромагнитных волн в средах с одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями (согласно современной терминологии – в левосторонних метаматериалах). Позднее Дж. Б. Пендри выдвинул идею так называемой «суперлинзы», разрешающая способность которой могла бы превышать дифракционный предел. Ввиду перспективности для практических приложений это вызвало дискуссию, посвященную возможности как антипараллельности фазовой и групповой скоростей, так и самой реализации сверхразрешения для источника излучения в виде монополя. Однако использованные при этом приближения лучевой теории уменьшили общность полученных результатов, пренебрежение потерями радикально исказило их, а ошибки в теоретическом анализе привели к неправильной физической трактовке. В данной работе получено строгое решение задачи о фокусировке излучения элементарного электрического диполя, ориентированного вертикально относительно плоского слоя конечной толщины из левостороннего метаматериала с поглощением. Численно промоделировано пространственное распределение электромагнитного поля в слое, а также прошедшее и отраженное от него поле при различных высотах диполя, толщинах слоя и потерях в каждой среде. Анализ рассчитанной пространственной структуры электромагнитного поля подтвердил фокусирующие способности границ раздела обычной и левосторонней сред, а также плоской линзы. Ил. 5. Библиогр.: 26 назв.

Ключевые слова: электрический диполь, электромагнитное поле, левосторонний метаматериал, суперлинза.

В 1967 году В. Г. Веселаго рассмотрел возможность распространения электромагнитных волн в средах с одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями (левосторонних метаматериалах по современной терминологии), основываясь на простых соображениях о том, что квадрат показателя преломления остается при этом положительным [1].

Последовавшая спустя десятилетия практическая реализация левосторонних метаматериалов сначала в микроволновом, а затем и в более высокочастотных диапазонах, вызвала интерес к этой первоначально казавшейся абстрактной идее.

В работе [1] была предложена конструкция плоской линзы из метаматериала с показателем преломления $n = -1$. В 2000 году Дж. Б. Пендри выдвинул идею «суперлинзы» с разрешающей способностью выше известного из классической оптики дифракционного предела [2]. Последовавшая в [3–5] и множестве других работ дискуссия рассматривала физический смысл антипараллельности фазовой и групповой скоростей и принципиальную возможность сверхразрешения линзой Пендри. Однако исследование было ограничено источником излучения в виде монополя, использованием геометрооптического приближения и рассмотрением бездиссипативных сред, что вызывало сомнения в общности полученных результатов.

Более поздние работы [6–9] не внесли окончательной ясности, что довольно странно, учитывая солидную историю исследований по распространению объемных и поверхностных электромагнитных волн в обычных слоистых средах [10–14]. Более того, ряд явно ошибочных

результатов воспроизводится в относительно новых монографиях [15, 16].

Поэтому, учитывая интерес и перспективы практического применения плоских линз (которые проще в изготовлении, чем сферические) из левосторонних метаматериалов (в частности, для неразрушающего контроля [17, 18]), востребованными представляются обобщение и, при необходимости, коррекция полученных ранее результатов [10–14] на случай левосторонних сред.

При этом рассмотрение модельных точно решаемых задач на примере точечного диполя, горизонтально или вертикально ориентированного относительно полупространства или слоя из левостороннего метаматериала, с минимумом допущений и приближений позволяет более глубокий физический анализ явления фокусировки электромагнитного поля линзой Пендри [19–22].

Критически важным при этом является учет потерь в метаматериалах. С одной стороны, в силу фундаментального принципа причинности потери в левосторонней среде не могут быть произвольно уменьшены [23]. С другой стороны, влияние потерь в метаматериале, лишь косвенно упомянутое в работе [1], является, как показано аналитически и в результате численных расчетов, определяющим фактором качества фокусировки плоской линзой Пендри [21, 24, 25].

Целью настоящей работы является теоретический анализ и численные расчеты пространственного распределения электромагнитного поля элементарного электрического диполя, расположенного нормально к границе плоского слоя из левостороннего метаматериала с потерями, на конечном расстоянии от него.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два полупространства, разделенные плоским слоем толщиной h . Комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости каждой из сред есть

$$\varepsilon_a(\omega) = \varepsilon'_a(\omega) + i\varepsilon''_a(\omega),$$

$$\mu_a(\omega) = \mu'_a(\omega) + i\mu''_a(\omega),$$

где индексом a здесь и всюду ниже отмечены величины, относящиеся к верхнему ($a=1$) и нижнему ($a=3$) полупространствам, а также к разделяющему их слою ($a=2$). Если ось z системы координат направить вверх нормально к слою, то его верхняя и нижняя границы будут задаваться уравнениями $z=0$ и $z=-h$ (рис. 1).

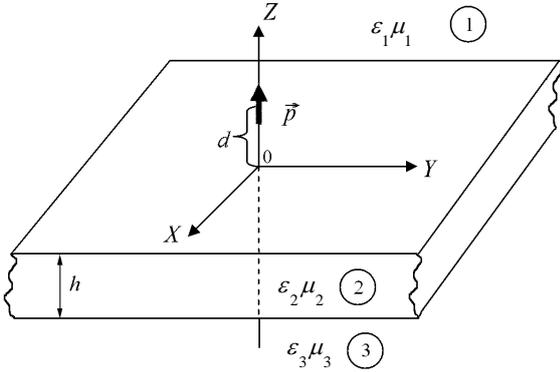


Рис. 1. Геометрия задачи

В общем случае полагаем все среды имеющими потери (диссипативными), так что $\text{Im } \varepsilon_a(\omega) > 0, \text{Im } \mu_a(\omega) > 0$. (1)

Электромагнитное поле, создаваемое монохроматическим (с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$) источником с плотностью тока $\vec{j}_\omega(\vec{r})$, описывается уравнениями Максвелла

$$\vec{E}_{a\omega}(\vec{r}) = i\omega\mu_a(\omega)\vec{H}_{a\omega}(\vec{r}), \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{H}_{a\omega}(\vec{r}) = -i\omega\varepsilon_a(\omega)\vec{E}_{a\omega}(\vec{r}) + \vec{j}_\omega(\vec{r})$$

с граничными условиями для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей при $z=0$ и $z=-h$.

Опуская индекс ω у комплексных амплитуд, для вертикального электрического диполя с токовым моментом p_z в декартовых координатах получим $\vec{j}(\vec{r}) = \{0, 0, j_z(\vec{r})\}$, где

$$j_z(\vec{r}) = p_z \delta(x)\delta(y)\delta(z-d). \quad (3)$$

В цилиндрических координатах (ρ, ϕ, z) двумерная дельта-функция $\delta(x)\delta(y)$ имеет вид:

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{\pi\rho} \delta(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dq q J_0(q\rho).$$

Соответственно, выражение (3) для плотности тока становится аксиально-симметричным

$$j_z(\rho, z) = \frac{p_z \delta(z-d)}{2\pi} \int_0^\infty dq q J_0(q\rho). \quad (4)$$

Дальнейшие рассуждения и вывод аналогичны приведенным в работе [22]. Аксиально-симметричный ток $j_z(\rho, z)$ возбуждает в каждой среде только поперечно-магнитные TM -волны с единственными ненулевыми компонентами $\{H_{a\phi}, E_{a\rho}, E_{az}\}$. Волновое уравнение для $H_{a\phi}(\rho, z)$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 H_{a\phi}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{a\phi}) \right] + k_a^2 H_{a\phi} = \frac{\partial j_z}{\partial \rho} \quad (5)$$

с граничными условиями на верхней (при $z=0$)

$$H_{1\phi}(\rho, 0) = H_{2\phi}(\rho, 0), \quad (6)$$

$$E_{1\rho}(\rho, 0) = E_{2\rho}(\rho, 0),$$

и нижней (при $z=-h$) границах слоя

$$H_{2\phi}(\rho, -h) = H_{3\phi}(\rho, -h), \quad (7)$$

$$E_{2\rho}(\rho, -h) = E_{3\rho}(\rho, -h).$$

Оставшиеся компоненты TM -волны определяются соотношениями

$$E_{a\rho} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_a} \frac{\partial H_{a\phi}}{\partial z}; \quad (8)$$

$$E_{az} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_a} \left[j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{a\phi}) \right]. \quad (9)$$

В уравнении (5) комплексное волновое число $k_a = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$, а все квадратные корни всюду ниже следует понимать в смысле главного значения [19, 22].

Совокупность уравнения (5) для магнитного поля $H_{a\phi}(\rho, z)$, граничных условий (6), (7) и соотношений (8), (9) для компонент электрического поля $E_{a\rho}(\rho, z)$ и $E_{az}(\rho, z)$ определяют постановку задачи в каждой среде a .

2. Метод решения. Используя, как и в работе [22], преобразование Ханкеля [26] для всех компонент электромагнитного поля

$$H_{a\phi}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q H_{a\phi}(q, z) J_1(q\rho), \quad (10)$$

$$E_{a\rho}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q E_{a\rho}(q, z) J_1(q\rho),$$

получим из (4)–(9) уравнение и граничные условия для ханкель-гармоник:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma_a^2 \right) H_{a\phi}(q, z) = -\frac{qp_z}{2\pi} \delta(z-d); \quad (11)$$

$$H_{1\phi}(q, 0) = H_{2\phi}(q, 0), \quad (12)$$

$$E_{1\rho}(q, 0) = E_{2\rho}(q, 0);$$

$$\begin{aligned} H_{2\phi}(q, -h) &= H_{3\phi}(q, -h), \\ E_{2\rho}(q, -h) &= E_{3\rho}(q, -h), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\gamma_a = \gamma_a(q) = \sqrt{k_a^2 - q^2}$. Для сходимости интегралов (10) $H_{a\phi}(q, z)$ должны удовлетворять еще одному граничному условию:

$$H_{a\phi}(q, z) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0. \quad (14)$$

Общее решение системы уравнений (11) в верхнем ($z > 0$) полупространстве, внутри слоя ($-h \leq z \leq 0$) и в нижнем ($z < -h$) полупространстве можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{1\phi}(q, z) &= A_1 e^{i\gamma_1 z} + B_1 e^{-i\gamma_1 z} - \frac{qP_z}{4\pi i \gamma_1} e^{i\gamma_1 |z-d|}, \\ H_{2\phi}(q, z) &= A_2 e^{-i\gamma_2 z} + B_2 e^{i\gamma_2(z+h)}, \\ H_{3\phi}(q, z) &= A_3 e^{-i\gamma_3(z+h)} + B_3 e^{i\gamma_3(z+h)}, \end{aligned} \quad (15)$$

Напомним, что при любых $0 \leq q < \infty$ для сред с потерями справедливо неравенство [22]

$$\text{Im } \gamma_a(q) > 0, \quad (16)$$

что было использовано в (15) при получении частного решения уравнения (11).

Условия (14) для $H_{a\phi}(q, z)$ на бесконечности $q \rightarrow +\infty$ с учетом асимптотического поведения $\gamma_a(q)$

$$\gamma_a(q) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} iq \quad (17)$$

дают значения для неизвестных констант $B_1 = B_3 = 0$, что позволяет переписать (15) как

$$\begin{aligned} H_{1\phi}(q, z) &= A_1 e^{i\gamma_1 z} - \frac{qP_z}{4\pi i \gamma_1} e^{i\gamma_1 |z-d|}, \\ H_{2\phi}(q, z) &= A_2 e^{-i\gamma_2 z} + B_2 e^{i\gamma_2(z+h)}, \\ H_{3\phi}(q, z) &= A_3 e^{-i\gamma_3(z+h)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая, что, согласно (8) и (10),

$$E_{a\rho}(q, z) = \frac{1}{i\omega \varepsilon_a} \frac{\partial H_{a\phi}(q, z)}{\partial z}, \quad (19)$$

граничные условия (12), (13) позволяют найти оставшиеся в (18) неизвестные константы и получить явные выражения для $H_{a\phi}(q, z)$ и $E_{a\rho}(q, z)$.

Электрическое поле. Величину $E_{1\rho}(q, z)$

в первой среде принято представлять в виде суммы $E_{1\rho}(q, z) = E_{\rho}^i(q, z) + E_{\rho}^r(q, z)$,

где падающая $E_{\rho}^i(q, z)$ и отраженная $E_{\rho}^r(q, z)$ компоненты задаются выражениями

$$\begin{aligned} E_{\rho}^i(q, z) &= -\text{sign}(z-d) \frac{qP_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} e^{i\gamma_1 |z-d|}, \\ E_{\rho}^r(q, z) &= R_h^{\varepsilon}(q) \frac{qP_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} e^{i\gamma_1(z+d)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь коэффициент отражения ханкель-гармоники TM -волны с волновым числом q в среде с параметрами ε_1, μ_1 от слоя толщиной h с параметрами ε_2, μ_2 , лежащего на полупространстве с параметрами ε_3, μ_3 , определяемый из (21) как

$$R_h^{\varepsilon}(q) = \frac{E_{\rho}^r(q, z=0)}{E_{\rho}^i(q, z=0)}, \quad (22)$$

дается выражением

$$R_h^{\varepsilon}(q) = \frac{R_{1,2}^{\varepsilon}(q) + R_{2,3}^{\varepsilon}(q) e^{2i\gamma_2 h}}{1 + R_{1,2}^{\varepsilon}(q) R_{2,3}^{\varepsilon}(q) e^{2i\gamma_2 h}}, \quad (23)$$

где

$$R_{1,2}^{\varepsilon}(q) = \frac{Z_1(q) - Z_2(q)}{Z_1(q) + Z_2(q)}, \quad R_{2,3}^{\varepsilon}(q) = \frac{Z_2(q) - Z_3(q)}{Z_2(q) + Z_3(q)}$$

имеют смысл парциальных коэффициентов отражения (а $Z_a(q) = \frac{\varepsilon_a}{\gamma_a(q)}$ – импедансов) той же ханкель-гармоники при падении из полупространства с параметрами ε_1, μ_1 на полупространство с параметрами ε_2, μ_2 для $R_{1,2}^{\varepsilon}(q)$ и аналогично для $R_{2,3}^{\varepsilon}(q)$ [22].

Электрическое поле внутри слоя

$$\begin{aligned} E_{2\rho}(q, z) &= T_{1,2}^{\varepsilon}(q) E_{\rho}^i(q, 0) \times \\ &\times e^{-i\gamma_2 z} + R_{2,3}^{\varepsilon}(q) e^{2i\gamma_2 h} e^{i\gamma_2 z} \\ &\times \frac{1}{1 + R_{1,2}^{\varepsilon}(q) R_{2,3}^{\varepsilon}(q) e^{2i\gamma_2 h}}, \end{aligned} \quad (24)$$

где, как следует из (21),

$$E_{\rho}^i(q, 0) = \frac{qP_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} e^{i\gamma_1 d},$$

а коэффициенты прохождения ханкель-гармоники TM -волны при падении из полупространства с параметрами ε_1, μ_1 (ε_2, μ_2) на полупространство с параметрами ε_2, μ_2 (ε_3, μ_3) [22]

$$T_{1,2}^{\varepsilon}(q) = \frac{2Z_1(q)}{Z_1(q) + Z_2(q)}, \quad T_{2,3}^{\varepsilon}(q) = \frac{2Z_2(q)}{Z_2(q) + Z_3(q)}.$$

Электрическое поле в нижнем полупространстве (при $z < -h$)

$$E_{3\rho}(q, z) = T_h^{\varepsilon}(q) E_{\rho}^i(q, 0) e^{-i\gamma_3(z+h)}, \quad (25)$$

где коэффициент прохождения ханкель-гармоники TM -волны из среды с параметрами ε_1, μ_1 через слой толщиной h с параметрами ε_2, μ_2 в полупространство с параметрами ε_3, μ_3 , определяемый из (25) как

$$T_h^{\varepsilon}(q) = \frac{E_{3\rho}(q, z=-h)}{E_{\rho}^i(q, z=0)}, \quad (26)$$

дается выражением

$$T_h^\varepsilon(q) = \frac{T_{1,2}^\varepsilon(q)T_{2,3}^\varepsilon(q)e^{i\gamma_2 h}}{1 + R_{1,2}^\varepsilon(q)R_{2,3}^\varepsilon(q)e^{2i\gamma_2 h}}. \quad (27)$$

Магнитное поле. Над слоем ($z > 0$) аналогично формуле (20) имеем

$$H_{1\phi}(q, z) = H_\phi^i(q, z) + H_\phi^r(q, z),$$

где $H_\phi^i(q, z)$ и $H_\phi^r(q, z)$ задаются выражениями

$$H_\phi^i(q, z) = -\frac{qP_z}{4\pi i\gamma_1} e^{i\gamma_1|z-d|}, \quad (28)$$

$$H_\phi^r(q, z) = R_h^\varepsilon(q) \frac{qP_z}{4\pi i\gamma_1} e^{i\gamma_1(z+d)}.$$

Магнитное поле внутри слоя есть

$$H_{2\phi}(q, z) = -\frac{\omega\varepsilon_2}{\gamma_2} T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) \times \frac{e^{-i\gamma_2 z} - R_{2,3}^\varepsilon(q)e^{2i\gamma_2 h} e^{i\gamma_2 z}}{1 + R_{1,2}^\varepsilon(q)R_{2,3}^\varepsilon(q)e^{2i\gamma_2 h}}, \quad (29)$$

а ниже его (при $z < -h$)

$$H_{3\phi}(q, z) = -\frac{\omega\varepsilon_3}{\gamma_3} T_h^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) e^{-i\gamma_3(z+h)}. \quad (30)$$

Коэффициенты отражения и прохождения. Отметим, что иногда соотношения (22), (26)

для TM -волн вводят по отношению к магнитному, а не электрическому полю:

$$R_h^\varepsilon(q) = \frac{H_\phi^r(q, z=0)}{H_\phi^i(q, z=0)}, \quad T_h^\varepsilon(q) = \frac{H_{3\phi}(q, z=-h)}{H_\phi^i(q, z=0)},$$

оставляя определения (22), (26) только для TE -волн. Единообразное введение этих коэффициентов для различных типов волн представляется более логичным.

Если при падении на полупространство эти коэффициенты удовлетворяют тождеству

$$T_{1,2}^\varepsilon(q) = 1 + R_{1,2}^\varepsilon(q), \quad T_{2,3}^\varepsilon(q) = 1 + R_{2,3}^\varepsilon(q),$$

то при падении на слой – нет:

$$T_h^\varepsilon(q) \neq 1 + R_h^\varepsilon(q).$$

Для наглядности на рис. 2 схематически представлены введенные коэффициенты отражения и прохождения для волны единичной амплитуды, падающей справа налево на полупространство (рис. 2, а и б) и слой (рис. 2, в). При рассмотрении предельных случаев слоя нулевой и бесконечной толщины из (22), (26) с учетом (16) можно получить:

$$R_h^\varepsilon(q) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} R_{1,2}^\varepsilon(q), \quad R_h^\varepsilon(q) \xrightarrow{h \rightarrow 0} R_{1,3}^\varepsilon(q),$$

$$T_h^\varepsilon(q) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0, \quad T_h^\varepsilon(q) \xrightarrow{h \rightarrow 0} T_{1,3}^\varepsilon(q).$$

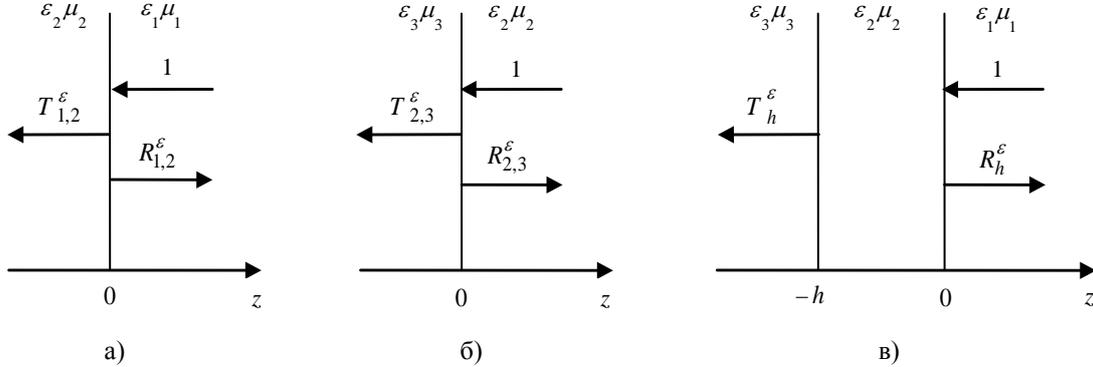


Рис. 2. Коэффициенты отражения и прохождения для случаев падения волны на полупространство и слой

3. Расчетные соотношения. Подстановка в (10) выражений (28)–(30) дает выражения для магнитного поля:

в верхнем полупространстве –

$$H_{1\phi}(\rho, z) = H_\phi^i(\rho, z) + H_\phi^r(\rho, z),$$

где

$$H_\phi^i(\rho, z) = -\int_0^\infty dq q^2 \frac{P_z}{4\pi i\gamma_1} e^{i\gamma_1|z-d|} J_1(q\rho), \quad (31)$$

$$H_\phi^r(\rho, z) = \int_0^\infty dq q^2 R_h^\varepsilon(q) \frac{P_z}{4\pi i\gamma_1} e^{i\gamma_1(z+d)} J_1(q\rho);$$

внутри слоя –

$$H_{2\phi}(\rho, z) = -\int_0^\infty dq q \frac{\omega\varepsilon_2}{\gamma_2} T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) \times \frac{e^{-i\gamma_2 z} - R_{2,3}^\varepsilon(q)e^{i\gamma_2 h} e^{i\gamma_2(z+h)}}{1 + R_{1,2}^\varepsilon(q)R_{2,3}^\varepsilon(q)e^{2i\gamma_2 h}} J_1(q\rho); \quad (32)$$

в нижнем полупространстве –

$$H_{3\phi}(\rho, z) = -\int_0^\infty dq q \frac{\omega\varepsilon_3}{\gamma_3} T_h^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) e^{-i\gamma_3(z+h)} J_1(q\rho). \quad (33)$$

Аналогичным образом подстановка в (10) выражений (21), (24), (25) дает радиальную компоненту электрического поля: в верхнем полупространстве –

$$E_{1\rho}(\rho, z) = E_\rho^i(\rho, z) + E_\rho^r(\rho, z),$$

где

$$E_\rho^i(\rho, z) = -\frac{\text{sign}(z-d)P_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} \int_0^\infty dq q^2 e^{i\gamma_1|z-d|} J_1(q\rho), \quad (34)$$

$$E_\rho^r(\rho, z) = \frac{P_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} \int_0^\infty dq q^2 R_h^\varepsilon(q) e^{i\gamma_1(z+d)} J_1(q\rho);$$

внутри слоя –

$$E_{2\rho}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) \times \frac{e^{-i\gamma_2 z} + R_{2,3}^\varepsilon(q) e^{i\gamma_2 h} e^{i\gamma_2(z+h)}}{1 + R_{1,2}^\varepsilon(q) R_{2,3}^\varepsilon(q) e^{2i\gamma_2 h}} J_1(q\rho); \quad (35)$$

в нижнем полупространстве –

$$E_{3\rho}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q T_h^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) e^{-i\gamma_3(z+h)} J_1(q\rho). \quad (36)$$

Дифференцирование формул (31)–(33) согласно (9) дает выражения для $E_{az}(\rho, z)$:

$$E_{1z}(\rho, z) = E_z^i(\rho, z) + E_z^r(\rho, z),$$

$$E_z^i(\rho, z) = \frac{P_z}{i\omega \varepsilon_1} \left[\frac{\delta(\rho)}{\pi\rho} \delta(z-d) + \int_0^\infty dq q^3 \frac{e^{i\gamma_1|z-d|}}{4\pi i \gamma_1} J_0(q\rho) \right], \quad (37)$$

$$E_z^r(\rho, z) = \frac{P_z}{\omega \varepsilon_1} \int_0^\infty dq q^3 \frac{R_h^\varepsilon(q) e^{i\gamma_1(z+d)}}{4\pi \gamma_1} J_0(q\rho);$$

$$E_{2z}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q^2 \frac{1}{i\gamma_2} T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) \times \frac{e^{-i\gamma_2 z} - R_{2,3}^\varepsilon(q) e^{i\gamma_2 h} e^{i\gamma_2(z+h)}}{1 + R_{1,2}^\varepsilon(q) R_{2,3}^\varepsilon(q) e^{2i\gamma_2 h}} J_0(q\rho); \quad (38)$$

$$E_{3z}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q^2 \frac{1}{i\gamma_3} T_h^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) \times e^{-i\gamma_3(z+h)} J_0(q\rho). \quad (39)$$

Тождество Зоммерфельда, справедливое при $\text{Im} k > 0$,

$$\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = i \int_0^\infty dq q \frac{e^{i\sqrt{k^2-q^2}|z|}}{\sqrt{k^2-q^2}} J_0(q\rho)$$

позволяет получить явные выражения для падающих электрического и магнитного полей:

$$H_\phi^i(\rho, z) = \frac{P_z}{4\pi i} \frac{k_1 \rho}{r^2} \left(1 - \frac{1}{ik_1 r} \right) e^{ik_1 r},$$

$$E_\rho^i(\rho, z) = \frac{P_z \omega \mu_1}{4\pi i} \frac{\rho(z-d)}{r^3} \left(1 - \frac{3}{ik_1 r} - \frac{3}{(k_1 r)^2} \right) e^{ik_1 r},$$

$$E_z^i(\rho, z) = \frac{j_z(\rho, z)}{i\omega \varepsilon_1} + \frac{P_z i \omega \mu_1}{4\pi} \frac{1}{r} \times \left[\frac{1}{ik_1 r} \left(1 - \frac{1}{ik_1 r} \right) \left(2 - \frac{3\rho^2}{r^2} \right) + \frac{\rho^2}{r^2} \right] e^{ik_1 r},$$

$$\text{где } r = \sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}.$$

4. Предельные случаи. Устремляя в полученных выше формулах $h \rightarrow \infty$, приходим к задаче определения поля вертикального электрического диполя, находящегося в верхнем ($z > 0$) полупространстве с параметрами ε_1, μ_1 на высоте d над плоскостью раздела с нижним ($z < 0$) полупространством с параметрами ε_2, μ_2 . Тогда формулы (31)–(39) для отраженных и прошедших компонент после замены

$$R_h^\varepsilon(q) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} R_{1,2}^\varepsilon(q), \quad T_h^\varepsilon(q) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$$

переходят в следующие [22]:

$$H_\phi^r(\rho, z) = \int_0^\infty dq q^2 R_{1,2}^\varepsilon(q) \frac{P_z}{4\pi i \gamma_1} e^{i\gamma_1(z+d)} J_1(q\rho),$$

$$H_{2\phi}(\rho, z) = -\int_0^\infty dq q \frac{\omega \varepsilon_2}{\gamma_2} T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) e^{-i\gamma_2 z} J_1(q\rho),$$

$$E_\rho^r(\rho, z) = \frac{P_z}{4\pi i \omega \varepsilon_1} \int_0^\infty dq q^2 R_{1,2}^\varepsilon(q) e^{i\gamma_1(z+d)} J_1(q\rho),$$

$$E_{2\rho}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) e^{-i\gamma_2 z} J_1(q\rho),$$

$$E_z^r(\rho, z) = \int_0^\infty dq q^3 R_{1,2}^\varepsilon(q) \frac{P_z}{4\pi \omega \varepsilon_1 \gamma_1} e^{i\gamma_1(z+d)} J_0(q\rho),$$

$$E_{2z}(\rho, z) = \int_0^\infty dq q^2 \frac{1}{i\gamma_2} T_{1,2}^\varepsilon(q) E_\rho^i(q, 0) e^{-i\gamma_2 z} J_0(q\rho).$$

Здесь было учтено, что в пределе $h \rightarrow \infty$ в силу условия (16) имеем $e^{i\gamma_2 h} \rightarrow 0$.

Аналогичным образом нетрудно рассмотреть случай слоя нулевой толщины. Устремляя в (31)–(39) $h \rightarrow 0$, приходим к задаче определения поля диполя, находящегося в полупространстве $z > 0$ с параметрами ε_1, μ_1 на высоте d над плоскостью раздела с полупространством $z < 0$ с параметрами ε_3, μ_3 .

При этом из определений коэффициентов отражения (23) и прохождения (27) следует, что

$$R_h^\varepsilon(q) \xrightarrow{h \rightarrow 0} R_{1,3}^\varepsilon(q), \quad T_h^\varepsilon(q) \xrightarrow{h \rightarrow 0} T_{1,3}^\varepsilon(q),$$

и получающиеся выражения для компонент электромагнитного поля с точностью до переобозначения индексов $2 \leftrightarrow 3$ совпадают, как это и должно быть, с приведенными выше.

5. Численное моделирование. В качестве примера на рис. 3–5 представлено пространственное распределение амплитуды электрического поля $E = \sqrt{E_\rho^2 + E_\phi^2}$ (в децибелах относительно величин 1 В/м) элементарного электрического диполя с единичным токовым моментом, расположенного на высоте d над плоским слоем толщиной h нормально к его границе.

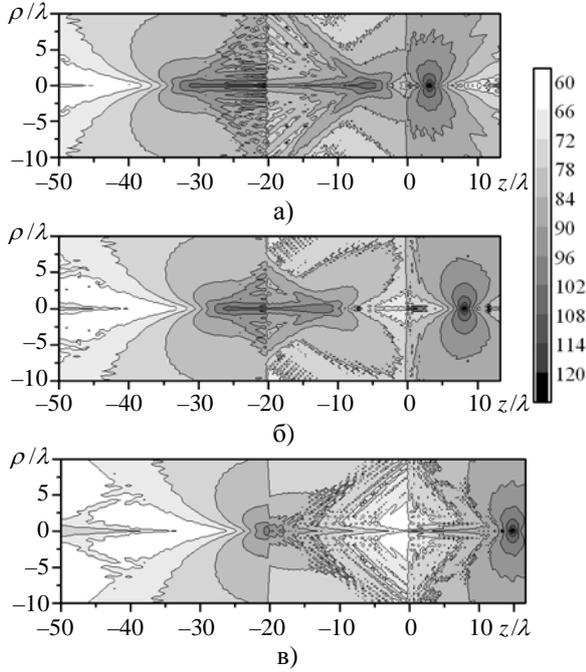


Рис. 3. Пространственная структура электрического поля для различных высот диполя: а) $d = 3\lambda$; б) $d = 8\lambda$; в) $d = 15\lambda$

Для всех рисунков параметры первой среды (вакуума): $\varepsilon_1' = \mu_1' = 1$, $\varepsilon_1'' = \mu_1'' = 0$, параметры второй – $\varepsilon_2' = -3$, $\mu_2' = -0,5$, $\varepsilon_2'' = \mu_2'' = 0,001$; точка $z = 0$ на оси Oz , направленной слева направо, соответствует верхней границе слоя, $z = d$ – высоте диполя. На рис. 3 и 4, как и в работах [19, 22], частота $f = \omega / 2\pi = 10$ ГГц, параметры третьей среды – $\varepsilon_3' = \mu_3' = 1$, $\varepsilon_3'' = \mu_3'' = 0$.

На рис. 3 при заданной толщине слоя $h = 20\lambda$, где $\lambda = c / f$ – длина волны излучения в вакууме, пространственное распределение амплитуды электрического поля имеет сложную интерференционную структуру при любых высо-

тах диполя d . Видно, что фокусирующие характеристики плоского слоя фиксированной толщины зависят от того, сформировалась ли при данном значении d фокальная область внутри слоя. При увеличении высоты диполя d фокальная область внутри слоя смещается к его нижней границе, а степень и характер локализации фокального пятна ниже слоя существенно изменяются.

На рис. 4 при заданной высоте диполя $d = 8\lambda$ представлено изменение уровня и характера локализации электрического поля ниже слоя и внутри его с ростом толщины h . Как и на предыдущем рисунке, фокусирующие свойства определяются тем, насколько сформировалась при данных h и d фокальная область внутри слоя. Во всех случаях наблюдаемая фокальная область имеет максимум, приблизительно совпадающий с вершиной сложной, в среднем имеющей (при вращении вокруг оси Oz) вид конуса, интерференционной структуры.

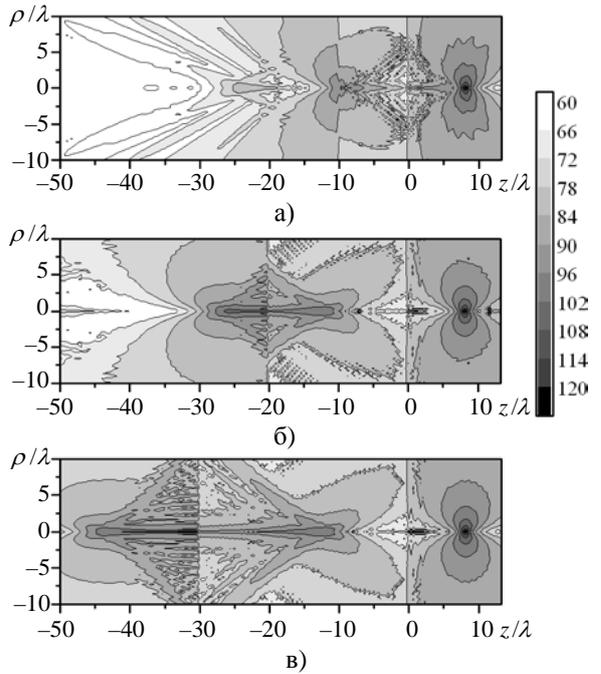


Рис. 4. Фокусировка излучения электрического диполя для различных толщин слоя: а) $h = 10\lambda$, б) $h = 20\lambda$, в) $h = 30\lambda$

На рис. 5 представлены результаты расчетов фокусировки слоем левостороннего метаматериала излучения диполя на частоте $f = 3$ ГГц в близкую по своим электрическим параметрам ($\varepsilon_3' = 4$, $\mu_3' = 1$, $\varepsilon_3'' = 0,4$, $\mu_3'' = 0$) к сухому песку среду. Более высокие значения вещественной, и мнимой частей диэлектрической проницаемости обусловили уменьшение в целом амплитуды фокального пятна и сглаживание характерной для сред со слабым поглощением тонкой структуры.

Изменение высоты диполя на рис. 5, а и б оказывает тот же эффект, что и на предыдущих рисунках. На рис. 5, в для сравнения представлено распределение поля при отсутствии слоя из метаматериала, характеризуемое, естественно, полным отсутствием эффекта фокусировки; провал вместо усиления поля при $\rho = 0$ обусловлен особенностями падающего поля вертикального диполя.

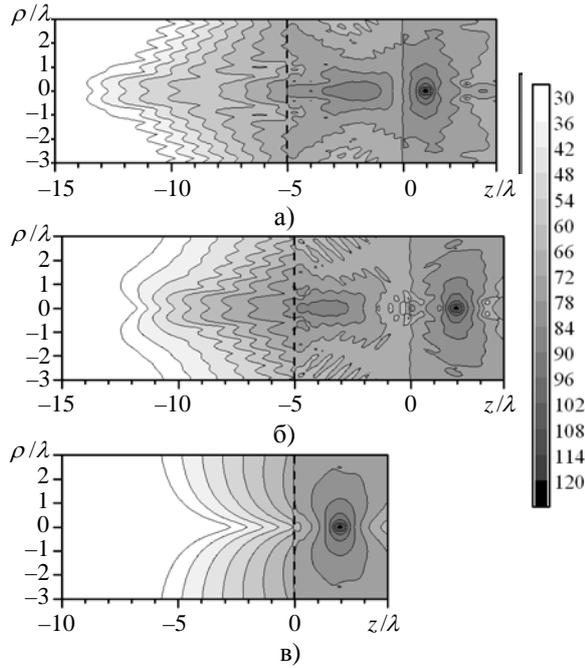


Рис. 5. Распределение электрического поля при наличии слоя из левостороннего метаматериала (для различных высот диполя: а) $d = \lambda$; б) $d = 2\lambda$) и в его отсутствие: в) $d = 2\lambda$

6. Обсуждение результатов. Полученное аналитическое решение является точным, поскольку при его выводе использовалось единственное модельное допущение – о точечном характере источника излучения.

Поскольку при выводе выражений (31)–(39) для электромагнитного поля использовалось только условие (16), то они справедливы при любых знаках вещественных частей $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$, т. е. для любых комбинаций слоя, верхнего и нижнего полупространств из обычной среды и левостороннего метаматериала.

Сведение посредством преобразования Ханкеля (10) волнового уравнения (5) к уравнению для длинных линий (11) позволяет не только использовать для дальнейшего анализа понятийный аппарат теории длинных линий, но и обеспечивает непосредственный переход к случаю многослойной среды.

Учет потерь, т. е. комплексного характера $\varepsilon_a(\omega)$ и $\mu_a(\omega)$, соответствует наиболее общей постановке задачи, а также в силу следующих из

принципа причинности дисперсионных соотношений является необходимым, поскольку существует нижний предел для поглощения в левосторонней среде [23]. Не отрицая собственно эффект фокусировки, это ограничение делает физически нереализуемой так называемую суперлинзу, при анализе которой потери не принимались во внимание [2].

Строгое решение модельной задачи об излучении вертикального электрического диполя, расположенного нормально к границе плоского слоя из левостороннего метаматериала, дополненное численным моделированием по полученным формулам, подтверждает общий характер эффекта фокусировки электромагнитного поля таким слоем и выявляет особенности, обусловленные как геометрией (толщиной слоя и высотой диполя), так и параметрами (рабочей частотой и электрическими характеристиками сред) задачи.

В соответствии с классической теорией рассеяния поле в первой среде представляется в виде суммы падающей и отраженной компонент. Выделение из последних слагаемых, ответственных за зеркальное отражение (в случае идеально проводящей второй среды), и рассмотрение оставшейся части как суммы объемной (*space*), поверхностной (*surface*) и захваченной (*trapped*) составляющих [10, 11] представляется физически некорректным и излишним.

Особенности подынтегральных выражений (31)–(39) для компонент полного электромагнитного поля во всех средах связаны с полюсами парциальных коэффициентов отражения (23) и прохождения (27). Уравнение для нахождения полюсов

$$1 + R_{1,2}^e(q)R_{2,3}^e(q)e^{2i\gamma_2 h} = 0$$

с учетом определения $R_{1,2}^e(q)$ и $R_{2,3}^e(q)$ приобретает вид

$$\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\right)\left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\gamma_2 + \gamma_3}\right) + \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\gamma_1 - \gamma_2}\right)\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\gamma_2 - \gamma_3}\right)e^{2i\gamma_2 h} = 0. \quad (40)$$

Уравнение (40) представляет собой дисперсионное уравнение для поперечно-магнитных поверхностных волн в системе из двух полупространств с параметрами ε_1, μ_1 и ε_3, μ_3 , разделенных слоем толщиной h с параметрами ε_2, μ_2 .

В пределе бесконечно толстого слоя $h \rightarrow \infty$ уравнение (40) расщепляется на два независимых – на его верхней и нижней границах:

$$\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\gamma_1 + \gamma_2}\right) = 0, \quad \left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\gamma_2 + \gamma_3}\right) = 0,$$

первое из которых, как следует из физических соображений, соответствует дисперсионному уравнению для *TM* поверхностных волн на границе полупространств с ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 , второе – полупространств с ε_2, μ_2 и ε_3, μ_3 , соответственно.

Полагая в (40) $h = 0$, получаем физически очевидный случай дисперсионного уравнения $\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + \frac{\varepsilon_3}{\gamma_3}\right) = 0$ для *TM* поверхностных волн на границе полупространств с ε_1, μ_1 и ε_3, μ_3 . Факт возбуждения поверхностных волн только *TM*-типа связан с симметрией задачи – в случае отклонения диполя от нормали появляются и *TE*-волны.

Таким образом, физическим механизмом фокусировки электромагнитного излучения как границей раздела, так и плоским слоем, является эффективное возбуждение поверхностных волн, что, как видно из (40), возможно только при разных знаках вещественных частей диэлектрической проницаемости соседних сред (поскольку мнимые части $\varepsilon_a(\omega)$ для пассивных сред всегда положительны).

Выводы. Распределение электромагнитного поля в левосторонних средах, включая плоские линзы, описываются теми же формулами, что и для обычных сред. Это видно при строгом решении модельных задач, не связанных с каким-либо приближением (плоских волн или бесконечно удаленного источника, пренебрежением потерями в диспергирующих средах и т. д.) или с использованием методов решения электродинамических задач не из первых принципов (геометрической оптики, суммирования переотражений).

Поскольку расчетные формулы в случае обычных и левосторонних сред тождественны, то эффект фокусировки, который можно предсказать и объяснить изменением знака тангенциальной компоненты вектора Пойнтинга при переходе через границу раздела таких сред, количественно можно оценить только в результате приобретающих поэтому особое значение численных расчетов.

Такие расчеты показали, что поперечный размер фокального пятна не превышает длины волны, а анонсированное суперразрешение является следствием некорректного пренебрежения потерями в левосторонних метаматериалах, противоречащего фундаментальному физическому принципу причинности.

Представляет интерес исследование пространственного разрешения для случаев произвольно ориентированных относительно поверхности плоских линз из левосторонних метаматериалов как одиночных точечных электрических и магнитных диполей, так и их пар или более многочисленных групп.

Авторы выражают искреннюю благодарность В. К. Иванову за постоянный интерес к работе и конструктивную критику.

Библиографический список

1. *Veselago V. G.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ / В. Г. Веселаго // Успехи физ. наук. – 1967. – 92, вып. 3. – С. 517–526.
2. *Pendry J. B.* Negative refraction makes a perfect lens / J. B. Pendry // Phys. Rev. Lett. – 2000. – 85, N 18. – P. 3966–3969.
3. *'t Hooft G. W.* Comment on “Negative refraction makes a perfect lens” / G. W. 't Hooft // Phys. Rev. Lett. – 2001. – 87, N 24. – P. 249701 (1 p.).
4. *Williams J. M.* Some problems with negative refraction / J. M. Williams // Phys. Rev. Lett. – 2001. – 87, N 24. – P. 249703 (1 p.).
5. *Garcia N.* Left-handed materials do not make a perfect lens / N. Garcia, M. Nieto-Vesperinas // Phys. Rev. Lett. – 2002. – 88, N 20. – P. 207403 (4 p.).
6. *Шатров А. Д.* Электродинамический анализ линзы Пендри / А. Д. Шатров // Радиотехника и электрон. – 2007. – 52, № 12. – С. 1430–1435.
7. *Zhang X.* Theory of the perfect lens / X. Zhang, S. R. Forrest // Phys. Rev. B. – 2011. – 84, N 4. – P. 045427 (7 p.).
8. *Селина Н. В.* Распространение электромагнитной волны в линзе Пендри / Н. В. Селина, Е. Н. Тумаев // Российские нанотехнологии. – 2016. – 11, № 5–6. – С. 78–82.
9. *Radi Y.* A novel method for wave focusing investigation in metamaterial half-space and slab lens structures / Y. Radi, S. Nikmehr, S. Hosseinzadeh // Int. J. Numer. Model. – 2016. – 29, N 1. – P. 63–76.
10. *Wait J. R.* Electromagnetic waves in stratified media / J. R. Wait. – Oxford: Pergamon Press, 1970. – 608 p.
11. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
12. *King R. W. P.* Lateral electromagnetic waves: theory and applications to communications, geophysical exploration, and remote sensing / R. W. P. King, M. Owens, T. T. Wu. – N. Y.: Springer-Verlag, 1992. – 746 p.
13. *King R. W. P.* The electromagnetic field of a vertical electric dipole in the presence of a three-layered region / R. W. P. King, S. S. Sandler // Radio Science. – 1994. – 29, N 1. – P. 97–113.
14. *Chew W. C.* Sommerfeld integrals for left-handed materials / W. C. Chew // Microwave Opt. Technol. Lett. – 2004. – 42, N 5. – P. 369–373.
15. *Li K.* Electromagnetic fields in stratified Media / K. Li. – Berlin: Springer, 2009. – 224 p.
16. *Novotny L.* Principles of nano-optics / L. Novotny, B. Hecht. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012. – 578 p.
17. *Shreiber D.* Microwave nondestructive evaluation of dielectric materials with a metamaterial lens / D. Shreiber, M. Gupta, R. Cravey // Sensors and Actuators A. – 2008. – 144, N 1. – P. 48–55.
18. *Shreiber D.* Comparative study of 1-D and 2-D metamaterial lens for microwave nondestructive evaluation of dielectric materials / D. Shreiber, M. Gupta, R. Cravey // Sensors and Actuators A. – 2011. – 165, N. 2. – P. 256–260.
19. *Иванов В. К.* Фокусировка электромагнитного поля точечного электрического диполя границей раздела обычной и левой сред / В. К. Иванов, А. О. Силин, А. М. Стадник // Радиоп физика и электрон. – 2013. – 4(18), № 4. – С. 40–48.
20. *Петрин А. Б.* Точечный излучатель, параллельный плоскому слою с отрицательным показателем преломления / А. Б. Петрин // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 2008. – 134, вып. 3(9). – С. 436–446.
21. *Петрин А. Б.* О разрешающей способности линз, изготовленных из материала с отрицательным преломлением /

- А. Б. Петрин // Квантовая электрон. – 2013. – 43, № 9. – С. 814–818.
22. Стадник А. М. Вертикальный диполь над полупространством из метаматериала: распределение электромагнитного поля и вектора Пойнтинга / А. М. Стадник, А. О. Силин // Радиофизика и электрон. – 2016. – 7(21), № 3. – С. 88–96.
23. Stockman M. I. Criterion for negative refraction with low optical losses from a fundamental principle of causality / M. I. Stockman // Phys. Rev. Lett. – 2007. – 98, N 17. – P. 177404 (4 p.).
24. Лагарьков А. Н. Качество фокусировки электромагнитного излучения плоскопараллельной пластиной из вещества с отрицательным коэффициентом преломления / А. Н. Лагарьков, В. Н. Кисель // Докл. РАН. – 2004. – 394, № 1. – С. 40–45.
25. Lagarkov A. N. Losses in metamaterials: restrictions and benefits / A. N. Lagarkov, V. N. Kisel // Physica B. – 2010. – 405, N 14. – P. 2925–2929.
26. Zemanian A. H. Generalized integral transformations / A. H. Zemanian. – N. Y.: Interscience Publishers, 1968. – 320 p.

Рукопись поступила 07.10.2016.

О. М. Stadnyk, О. О. Silin

FOCUSING THE VERTICAL ELECTRIC DIPOLE RADIATION BY PENDRY LENS

The flat lens conception was considered in the pioneering work of V. G. Veselago, who considered the possibility of electromagnetic waves propagation in media with simultaneously negative permittivity and permeability (according to modern terminology – in the left-handed metamaterials). Later, J. B. Pendry put forward the idea of so-called “superlens”, the resolution of which would exceed the diffraction limit. In view of the prospects for the practical applications it has caused a discussion on the possibility of antiparallelism of phase and group velocities and the actual superresolution implementation for the source in the form of a monopole. However, using the ray theory approximation reduced the generality of the results, neglecting losses radically distorted them, and errors in the theoretical analysis led to the wrong physical interpretation. In this paper, we obtained a rigorous solution to the problem of focusing radiation from elementary electric dipole located perpendicularly to the plane layer of finite thickness made

of the left-handed metamaterial with absorption. Spatial distribution of the electromagnetic field in the layer, as well as the incident and reflected fields at various heights of the dipole, layer thickness and losses in each environment are numerically simulated. The analysis of the calculated spatial structure of the electromagnetic field confirmed the focusing ability of the interfaces between ordinary and left-handed media, as well as a flat lens.

Key words: electric dipole, electromagnetic field, left-handed metamaterial, Pendry lens.

О. М. Стадник, О. О. Сілін

ФОКУСУВАННЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ДИПОЛЯ ЛІНЗОЮ ПЕНДРІ

Концепцію плоскої лінзи вперше було розглянуто в роботі В. Г. Веселаго, яка присвячена поширенню електромагнітних хвиль в середовищах з одночасно негативними діелектричною та магнітною проникностями (за сучасною термінологією – в лівосторонніх метаматеріалах). Пізніше Дж. Б. Пендрі висунув ідею так званої «суперлінзи», розрізнявальна здатність якої могла б перевищувати дифракційну границю. З огляду на перспективність для практичних застосувань, це викликало дискусію, присвячену можливості як антипаралельності фазової і групової швидкостей, так і самої реалізації надрозрізнення для джерела випромінювання у вигляді монополя. Однак використані при цьому наближення променевої теорії зменшили загальність отриманих результатів, нехтування втратами радикально спотворило їх, а помилки теоретичного аналізу призвели до неправильного фізичного трактування. У цій роботі отримано точний розв'язок задачі про фокусування випромінювання елементарного електричного диполя, розташованого вертикально до плоского шару кінцевої товщини з лівостороннього метаматеріалу з поглинанням. Чисельно промодельовано просторовий розподіл електромагнітного поля в шарі, а також падаюче і відбите від нього поля при різних висотах диполя, товщині шару і поглинаннях в кожному середовищі. Аналіз розрахованої просторової структури електромагнітного поля підтвердив фокусувальну здатність межі розподілу звичайного і лівостороннього середовищ, а також плоскої лінзи.

Ключові слова: електричний диполь, електромагнітне поле, лівосторонній метаматеріал, суперлінза.