

**А. М. Лінкова***Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины  
12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина  
E-mail: gannalinkova@gmail.com***ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ДОЖДЯ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ  
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РАССЕЙНИЯ ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ЗОНДИРОВАНИИ**

Измерение количества выпавших осадков представляет значительный интерес для решения многих практических задач. Обратная задача восстановления интенсивности дождя с помощью радиолокационных методов относится к некорректным задачам математической физики и описывается нелинейным интегральным уравнением. В работе рассматривается подход к решению интегрального уравнения рассеяния электромагнитных волн полидисперсной средой водных капель с помощью двухчастотного зондирования в СВЧ-диапазоне. Проведено численное моделирование восстановления интенсивности дождя в диапазоне 1...30 мм/ч для рабочих длин волн 0,82 и 3,2 см. Показано, что предложенный подход позволяет восстанавливать интенсивность дождя с погрешностью менее 20 % для интенсивности более 5 мм/ч и 60 % – для слабых дождей (менее 5 мм/ч). Ил. 8. Табл. 1. Библиогр.: 21 назв.

**Ключевые слова:** интенсивность дождя, радар, двухчастотное зондирование, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, регуляризация Тихонова.

Решение обратных задач дистанционного зондирования (определение интенсивности жидких осадков) связано, как правило, с решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода [1, 2]. Такие уравнения относятся к некорректным задачам математической физики [3] и требуют применения специальных методов, в частности методов регуляризации [4, 5], которые позволяют свести исходную некорректную задачу к условно-корректной задаче, решение которой является единственным и устойчивым.

Одним из эффективных методов регуляризации является метод Тихонова [6], основанный на использовании регуляризирующего оператора, правильный выбор которого определяет эффективность метода.

Регуляризирующие методы активно применялись для дистанционного зондирования атмосферы в оптическом диапазоне [7–10] с использованием многочастотного зондирования (больше 6 частот) или зондирования по углу места. Однако, несмотря на широкое применение методов регуляризации в оптическом диапазоне, их использование в радиометеорологии не получило широкого распространения в связи с ограниченными техническими возможностями создания многочастотных радаров в СВЧ-диапазоне.

Поэтому значительный интерес представляет работа [11], в которой предложено использовать измерение профиля отражаемости и ослабления вдоль вертикальной трассы при зондировании с аэрокосмических носителей. Особенностью предложенного метода является наличие границы поверхности раздела, в данном случае морской поверхности, что позволяет построить итерационную процедуру для нахождения профиля ослабления и отражаемости.

Поскольку указанный подход далеко не всегда может быть реализован на практике,

например, при дистанционном зондировании с помощью наземных метеорадаров, для решения такого рода обратных задач широко используется параметризация функции распределения капель дождя по размерам [12–14]. Такой подход позволяет свести исходную задачу восстановления неизвестной функции распределения к определению параметров выбранного распределения капель по размерам, что позволяет перейти от интегрального уравнения рассеяния к трансцендентному, решение которого возможно с помощью численных методов. При этом использование параметризации позволяет с высокой точностью восстанавливать параметры жидких осадков только в рамках выбранной модели распределения капель по размерам, что в случае реального распределения может привести к существенным погрешностям восстановления. Кроме этого, необходимо отметить, что поскольку выбор вида распределения основан на многочисленных данных контактных измерений микроструктурных характеристик осадков, то высокую точность таких методов следует ожидать только в среднестатистическом смысле.

В связи с этим значительный интерес представляет разработка методов решения интегрального уравнения рассеяния радиоволн микроволнового диапазона полидисперсной средой водных капель для восстановления параметров дождя без параметризации распределения капель по размерам.

**1. Интегральное уравнение рассеяния.** Активное радиолокационное зондирование жидких осадков основано на измерении мощности сигналов, отраженных от зоны дождя [15]:

$$P(R_i, \lambda) = \frac{P_T(\lambda) G_{T,R}(\lambda) \lambda^2 V_{ef}(R_i, \lambda) \sigma_0(R_i, \lambda)}{R_i^4 K(R_i, \lambda)}, \quad (1)$$

где  $P_T(\lambda)$  – мощность передатчика;  $V_{ef}(R_i, \lambda)$  – эффективный рассеивающий объем;  $R_i = R_0 + (i-1)\Delta R$  – расстояние от радиолокационной станции (РЛС) до рассеивающего объема;  $i = 1 \dots N_R$ ;  $N_R = (R_1 - R_0)/\Delta R$  – количество ячеек по дальности;  $\Delta R$  – разрешение радара по дальности;  $G_{T,R}(\lambda)$  – усиление передающей и приемной антенн соответственно;  $\lambda$  – длина волны;  $R_0$  – расстояние от РЛС до начала зоны дождя;  $R_1$  – расстояние от РЛС до конца зоны дождя;

$\sigma_0(R_i, \lambda) = \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \sigma_p(\lambda, d) N_0(R_i, d) dd$  – удельная эффективная поверхность рассеяния (ЭПР);  $\sigma_p(\lambda, d)$  – ЭПР отдельных частиц;  $N_0(d)$  – распределение капель по размерам;  $d$  – диаметр капель;  $d_{\min}$  и  $d_{\max}$  – минимальный и максимальный диаметры капель;  $K(R_i, \lambda) = \exp \left\{ 2 \int_{R_0}^{R_i} \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \sigma_{at}(\lambda, d) N_0(R, d) dd dR \right\}$  – коэффициент ослабления сигнала при распространении на трассе;  $\sigma_{at}(\lambda, d)$  – поперечное сечение ослабления отдельной частицы.

Таким образом, решение обратной задачи по восстановлению параметров жидких осадков сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$P(R_i, \lambda) = \frac{P_T(\lambda) G_{T,R}(\lambda) \lambda^2 V_{ef}(R_i, \lambda)}{R_i^4} \times \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \sigma_p(\lambda, d) N_0(R_i, d) dd \times \frac{\exp \left\{ 2 \int_{R_0}^{R_i} \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \sigma_{at}(\lambda, d) N_0(R, d) dd dR \right\}}{K(R_i, \lambda)} \quad (2)$$

В случае приближения малых ослаблений  $K(R_i, \lambda) \rightarrow 1$ , которое реализуется, например, в длинноволновом участке сантиметрового диапазона длин волн, интегральное уравнение (2) существенно упрощается и сводится к следующему линейному интегральному уравнению:

$$P(R_i, \lambda) = \frac{P_T(\lambda) G_{T,R}(\lambda) \lambda^2 V_{ef}(R_i, \lambda)}{R_i^4} \times \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \sigma_p(\lambda, d) N_0(R_i, d) dd \quad (3)$$

или

$$\sigma_0(R_i, \lambda) = \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \sigma_p(\lambda, d) N_0(R_i, d) dd, \quad (4)$$

в котором удельная ЭПР полидисперсной среды  $\sigma_0(R_i, \lambda)$  вычисляется в результате радиолокационных измерений и определяется выражением

$$\sigma_0(R_i, \lambda) = \frac{P(R_i, \lambda) R_i^4}{P_T(\lambda) G_{T,R}(\lambda) \lambda^2 V_{ef}(R_i, \lambda)}$$

Рассмотрим решение уравнения (4) для одной из ячеек разрешения по дальности. Данное уравнение относится к линейному интегральному уравнению Фредгольма первого рода [1], в котором в качестве ядра выступает ЭПР одиночных капель  $\sigma_p(\lambda, d)$ , а распределение капель по размерам  $N_0(d)$  является искомой функцией. При этом частотная зависимость удельной ЭПР  $\sigma_0(R_i, \lambda)$  является свободным членом интегрального уравнения.

Для решения интегрального уравнения (4) аппроксимируем ядро  $\sigma_p(\lambda, d)$  и неизвестную функцию  $N_0(d)$  степенными полиномами

$$\sigma_p(\lambda, d) = \sum_{m=1}^M F_m(\lambda) d^{m-1}, \quad N_0(d) = \sum_{l=1}^L C_l d^{l-1}, \quad (5)$$

где  $F_m(\lambda)$  – коэффициенты разложения функции  $\sigma_p(\lambda, d)$ ,  $C_l$  – неизвестные коэффициенты разложения неизвестной функции  $N_0(d)$ ,  $M-1$ ,  $L-1$  – степень полинома в разложении функций  $\sigma_p(\lambda, d)$  и  $N_0(d)$  соответственно.

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\sigma_0(\lambda) = \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \left[ \sum_{m=1}^M F_m(\lambda) d^{m-1} \sum_{l=1}^L C_l d^{l-1} \right] dd. \quad (6)$$

Вычислив интеграл (6), получим выражение

$$\sigma_0(\lambda) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \left[ \frac{F_m(\lambda) C_l}{l+m-1} (d_{\max}^{m+l-1} - d_{\min}^{m+l-1}) \right], \quad (7)$$

которое представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и может быть записано в матричной форме

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{A}$  – известная квадратная матрица с коэффициентами  $AA_{i,j} = \sum_{m=1}^M \left[ \frac{F_m(\lambda_i)}{j+m-1} (d_{\max}^{m+j-1} - d_{\min}^{m+j-1}) \right]$ ;

$\mathbf{X} = [C_1, \dots, C_i, \dots, C_L]^T$  – столбец неизвестных коэффициентов;  $\mathbf{B} = [\sigma_0(\lambda_1), \dots, \sigma_0(\lambda_i), \dots, \sigma_0(\lambda_L)]^T$  – столбец значений удельной ЭПР в заданном диапазоне длин волн  $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_L$ ;  $j = 1 \dots M$ ;  $i = 1 \dots L$ .

Таким образом, для нахождения неизвестных коэффициентов  $C_i$  необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (8).

**2. Частотная зависимость удельной ЭПР дождя.** Для решения матричного уравнения (8) необходимо определить зависимость удельной ЭПР от длины волны. Такие измерения крайне сложно осуществить на практике в связи с техническими трудностями создания метеорадара с перестройкой частоты в широком диапазоне (многочастотного радара).

С другой стороны, учитывая огромное количество частиц разных размеров в рассеивающем объеме, трудно ожидать резонансного характера рассеяния подобной средой, поэтому можно предположить, что функция  $\sigma_0(\lambda)$  должна быть достаточно гладкой. В связи с этим рассмотрим поведение удельной ЭПР  $\sigma_0(\lambda)$  в диапазоне длин волн  $\lambda = 1 \text{ мм} \dots 5 \text{ см}$ . Для этого необходимо найти решение прямой задачи рассеяния согласно (4), которое включает следующие этапы:

1) Выбирается вид распределения капель по размерам  $N_0^m(d)$  согласно одной из моделей (10)–(12), параметры которого подбираются из условия получения заданной интенсивности дождя  $I_m$

$$I_m = \frac{\pi}{6} \int_0^{\infty} d^3 V(d) N_0^m(d) dd, \quad (9)$$

где  $V(d) = 9,65 - 10,3 \exp(-600d)$  – скорость падения капель дождя [16].

2) Для каждой длины волны в выбранном диапазоне рассчитывается зависимость ЭПР одиночных капель  $\sigma_p(d, \lambda_i)$  от их диаметра ( $d = 0,1 \dots 6 \text{ мм}$  при температуре окружающей среды  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ). При этом рассматривались капли сферической формы, что позволяет применять разработанную теорию дифракции электромагнитных волн на диэлектрической сфере (теорию Ми [17]).

3) Используя выражение (4) рассчитывается частотная зависимость удельной ЭПР  $\sigma_0(\lambda)$  для выбранного диапазона длин волн и  $N_0^m(d)$ , обеспечивающего необходимое значение интенсивности  $I_m$ .

При этом использовались следующие модели распределения капель по размерам: гамма-распределение [18]

$$N_0^m(d) = \frac{N d^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1) \beta^{\alpha + 1}} \exp\left(-\frac{d}{\beta}\right), \quad (10)$$

где  $N$  – концентрация капель,  $\beta$ ,  $\alpha$  – параметры распределения,  $\Gamma(\alpha + 1)$  – гамма-функция;

логнормальное распределение [19]

$$N_0^m(d) = \frac{N}{gd\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(d/s)}{g}\right]^2\right), \quad (11)$$

где  $g$ ,  $s$  – параметры распределения;

распределение Маршала–Пальмера [20]

$$N_0^m(d) = 8000 \exp(-41dI_p^{-0,21}), \quad (12)$$

где  $I_p$  – в мм/ч;  $d$  – в см.

Результаты вычислений приведены на рис. 1, где сплошная кривая соответствует гамма-распределению, штриховая – распределению Маршала–Пальмера, пунктирная – логнормальному распределению.

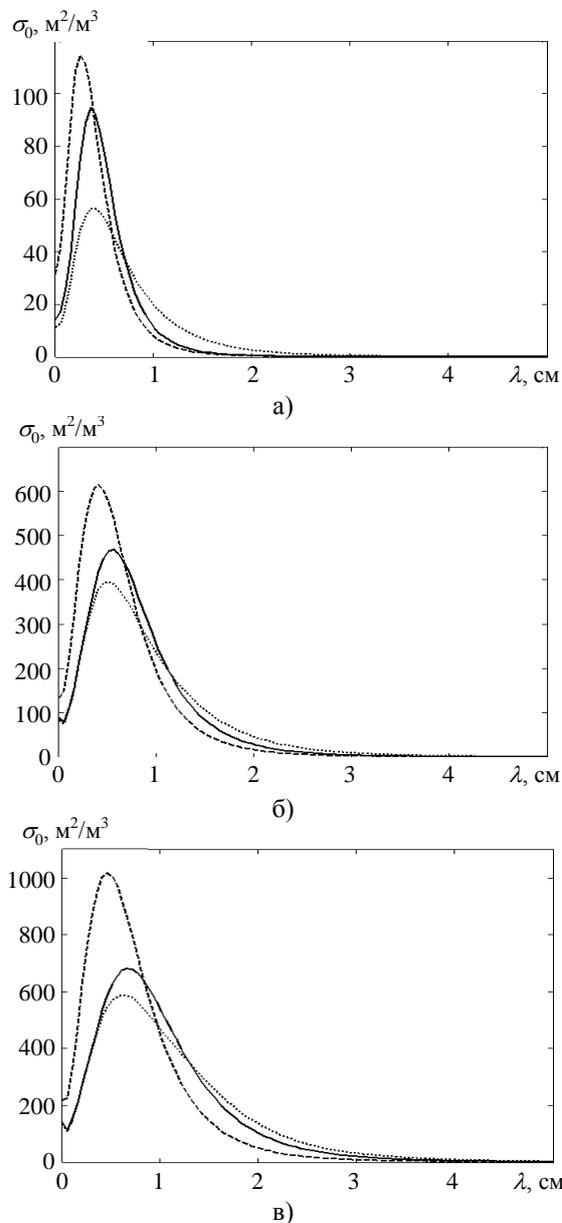


Рис. 1. Графики зависимости удельной ЭПР от длины волны для разных интенсивностей дождя: а)  $I_m = 1 \text{ мм/ч}$ ; б)  $I_m = 10 \text{ мм/ч}$ ; в)  $I_m = 20 \text{ мм/ч}$

Как видно, в длинноволновом участке зависимости  $\lambda > 0,8...1$  см кривые монотонно спадают и могут быть аппроксимированы двухпараметрическими функциями, что удобно в случае применения двухчастотного зондирования. В частности, в работе использованы экспоненциальная функция (13), степенная (14), а также их среднее (15):

$$\sigma_0^{ap}(\lambda) = a_1 \exp(b_1 \lambda), \quad (13)$$

$$\sigma_0^{ap}(\lambda) = -a_2 \lambda^{-b_2}, \quad (14)$$

$$\sigma_0^{ap}(\lambda) = \frac{a_1 \exp(b_1 \lambda) - a_2 \lambda^{-b_2}}{2}, \quad (15)$$

где  $a_1, b_1, a_2, b_2$  – коэффициенты, значения которых могут быть определены, в частности, по результатам двухчастотного зондирования на рабочих длинах волн  $\lambda_1^o$  и  $\lambda_2^o$

$$a_1 = \frac{\sigma_0(\lambda_1^o)}{\exp(b_1 \lambda_1^o)}, \quad b_1 = \frac{\ln[\sigma_0(\lambda_2^o) / \sigma_0(\lambda_1^o)]}{(\lambda_2^o - \lambda_1^o)}; \quad (16)$$

$$a_2 = \frac{-\sigma_0(\lambda_1^o)}{(\lambda_1^o)^{-b_2}}, \quad b_2 = \frac{-\ln[\sigma_0(\lambda_2^o) / \sigma_0(\lambda_1^o)]}{\ln(\lambda_2^o / \lambda_1^o)}, \quad (17)$$

где  $\sigma_0(\lambda_1^o)$  и  $\sigma_0(\lambda_2^o)$  – значения удельной ЭПР, измеренные при двухчастотном зондировании.

На рис. 2 показан пример сравнения истинных значений зависимости свободного члена интегрального уравнения (4) от длины волны  $\sigma_0(\lambda)$  с аппроксимирующими зависимостями  $\sigma_0^{ap}(\lambda)$  (13)–(15), коэффициенты которых рассчитаны согласно (16), (17) в диапазоне длин волн  $\lambda = 0,82...3,2$  см, который широко используется в метеорадарах. При этом истинные значения  $\sigma_0(\lambda)$  получены путем решения прямой задачи рассеяния (4) для интенсивностей дождя  $I_m = 1$  мм/ч (рис. 2, а),  $I_m = 10$  мм/ч (рис. 2, б) и  $I_m = 20$  мм/ч (рис. 2, в) и модели распределения капель дождя по размерам в виде гамма-распределения (10). Сплошная линия соответствует истинным значениям зависимости  $\sigma_0(\lambda)$ , точки – аппроксимации (15), круги – аппроксимации (13), звездочки – аппроксимации (14). Приведенные результаты показывают, что использование двухчастотного зондирования, в принципе, позволяет получить приближенную зависимость  $\sigma_0(\lambda)$ , которая аппроксимирует результаты рассеяния электромагнитных волн полидисперсной средой в диапазоне длин волн  $\lambda > 0,8...1$  см, однако точность аппроксимации в значительной мере зависит от интенсивности дождя.

Использование аппроксимированной зависимости  $\sigma_0^{ap}(\lambda)$  приводит к трансформации матричного уравнения (8), в котором столбец  $\mathbf{B}$

заменяется на столбец аппроксимированных значений удельной ЭПР

$$\mathbf{B}' = [\sigma_0^{ap}(\lambda_1) \dots \sigma_0^{ap}(\lambda_i) \dots \sigma_0^{ap}(\lambda_L)]^T, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

что позволяет решить СЛАУ (8) с учетом экспериментальных данных в выражениях (16), (17).

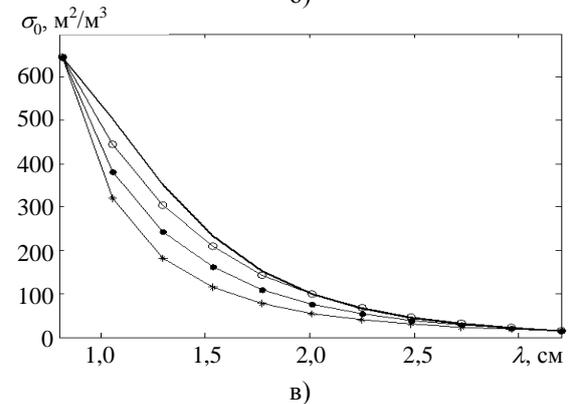
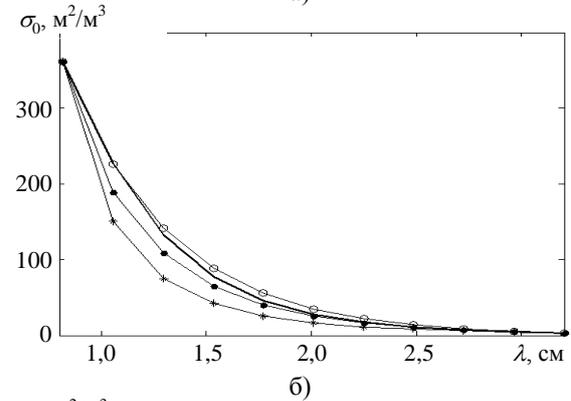
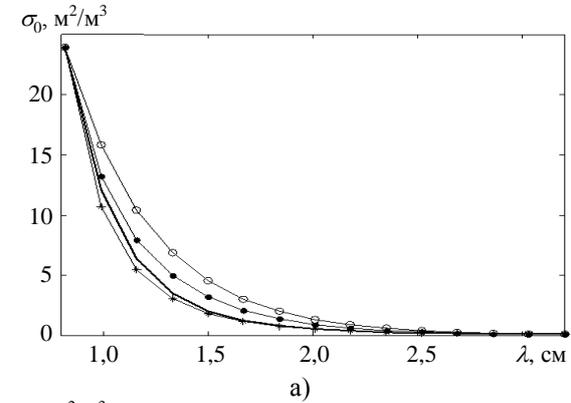


Рис. 2. Графики зависимости удельной ЭПР от длины волны: а)  $I_m = 1$  мм/ч; б)  $I_m = 10$  мм/ч; в)  $I_m = 20$  мм/ч

**3. Решение системы линейных алгебраических уравнений.** Исходное уравнение (4) является линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода и относится к классу некорректных математических задач [3]. В частности, оценка числа обусловленности [21], которое характеризует степень устойчивости решения, показывает, что матричное уравнение (18),

полученное на его основе, является плохо обусловленным, когда малые изменения свободного члена (столбец  $\mathbf{B}'$ ) приводят к большим изменениям получаемых решений  $\mathbf{X}$ . В рассматриваемом случае наличие подобных изменений, в основном, связано с ошибками измерений удельных значений ЭПР  $\sigma_0(\lambda_{1,2}^0)$ , погрешностью аппроксимации  $\sigma_0(\lambda)$ , а также конечной точностью вычислений. В связи с этим для решения таких задач широко используются методы регуляризации [4, 5], которые позволяют получить устойчивые решения, в частности, метод регуляризации Тихонова [6].

**4. Регуляризация Тихонова.** В этом случае концепция регуляризации сводится к замене исходной некорректной задачи задачей минимизации некоторой функции, которая может быть сведена к следующей системе линейных алгебраических уравнений [4]:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha_r \mathbf{E}) \mathbf{X}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица;  $\mathbf{A}^T$  – транспонированная матрица  $\mathbf{A}$ ;  $\alpha_r$  – параметр регуляризации.

Таким образом, исходная СЛАУ (18) в процессе регуляризации заменяется на СЛАУ вида (19), решая которую можно получить устойчивые значения коэффициентов  $\mathbf{X} = [C_1, \dots, C_i, \dots, C_L]$  и восстановить функцию распределения капель по размерам  $N_0^r(d)$  (5), что позволяет рассчитать значение интенсивности дождя  $I_r$ , используя выражение (9).

Поскольку для решения интегрального уравнения (4) используется аппроксимация степенными полиномами ядра и искомой функции, становится актуальной задача выбора степени полинома, которая обеспечивает приемлемую точность аппроксимации. В связи с этим рассчитаны ошибки аппроксимации зависимостей  $\sigma_p(\lambda, d)$  и  $N_0(d)$  в диапазоне изменения степеней полиномов  $M-1=1...34$ ,  $L-1=1...34$  согласно следующим выражениям:

$$\delta_\sigma(M) = \frac{\int_{d_{\min}}^{d_{\max}} (\sigma_p(\lambda, d) - \sigma_p^{ap}(\lambda, d, M))^2 dd}{\int_{d_{\min}}^{d_{\max}} (\sigma_p(\lambda, d))^2 dd} \cdot 100\%; \quad (20)$$

$$\delta_N(L) = \frac{\int_{d_{\min}}^{d_{\max}} (N_0(d) - N_0^{ap}(d, L))^2 dd}{\int_{d_{\min}}^{d_{\max}} (N_0(d))^2 dd} \cdot 100\%, \quad (21)$$

где  $\sigma_p^{ap}(\lambda, d)$  и  $N_0^{ap}(d)$  – аппроксимированные значения зависимости ЭПР капли от диаметра и функции распределения капель по размерам соответственно.

В частности, на рис. 3 приведена зависимость ошибки аппроксимации, полученная по методу наименьших квадратов, от степени полинома для ЭПР одиночной капли в диапазонах длин волн 8,2 мм (рис. 3, а) и 3,2 см (рис. 3, б). Полученные результаты показывают, что наибольшие ошибки аппроксимации наблюдаются при степени полинома менее 5, однако с ростом степени полинома ошибка уменьшается.

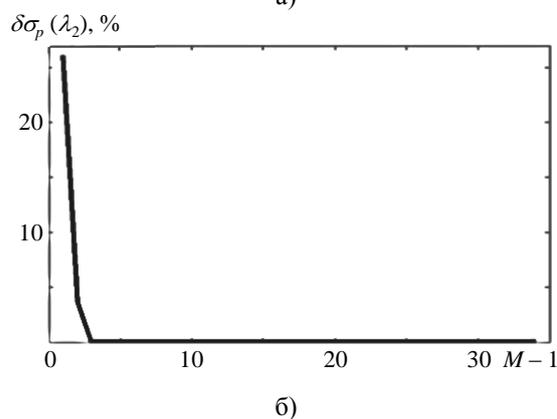
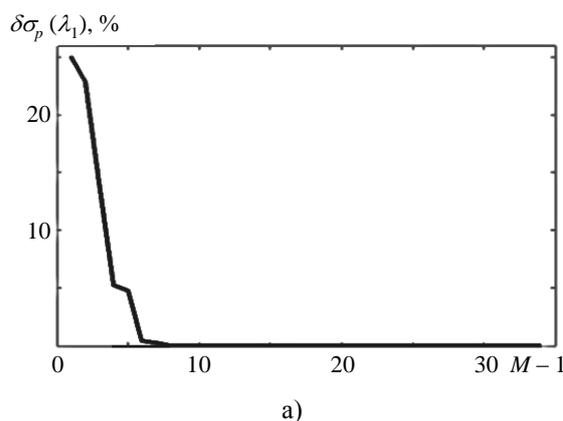


Рис. 3. Графики зависимости ошибки аппроксимации от степени полинома для ЭПР одиночной капли: а)  $\lambda = 8,2$  мм; б)  $\lambda = 3,2$  см

Аналогичные результаты получены и для случая аппроксимации распределения капель по размерам, как показано на рис. 4. Таким образом, согласно приведенным данным, при аппроксимации степенным полиномом ядра и искомой функции в (4) рекомендуется выбирать степень полинома  $> 10$ .

Одной из проблем, связанных с использованием регуляризации по Тихонову, является сложность поиска оптимального значения параметра регуляризации. С одной стороны, увеличение пара-

метра  $\alpha_r$  приводит к сглаживанию решения, а с другой стороны – к смещению регуляризованного решения системы (19) от истинного решения исходной системы уравнений (18). Другими словами, для малых значений параметра  $\alpha_r \sim 0$  проблема близка к исходной некорректной задаче, а при больших  $\alpha_r$  задача становится корректной, но ее решение далеко от решения исходной задачи.

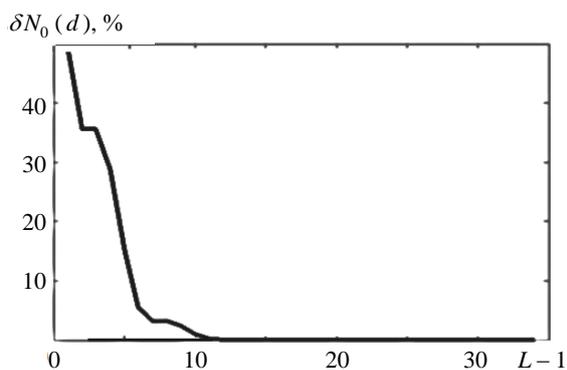


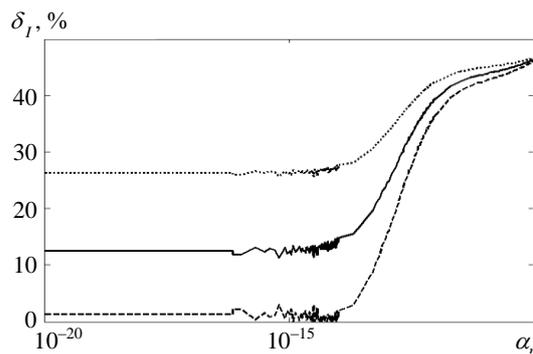
Рис. 4. График зависимости ошибки аппроксимации от степени полинома для функции распределения капель по размерам

Кроме того, как будет показано ниже, значение оптимального параметра регуляризации зависит от рабочих длин волн и интенсивности дождя. В частности, на рис. 5 приведена зависимость ошибки восстановления интенсивности

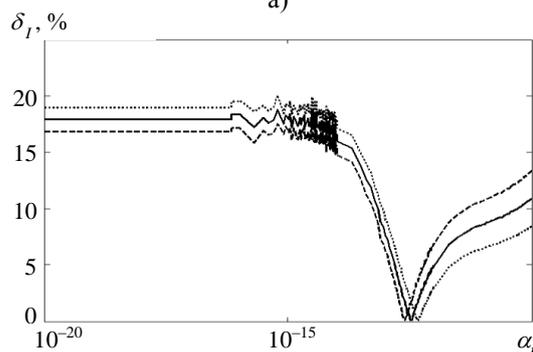
$$\delta_I = \left| \frac{I_m - I_r(\alpha_r, L, M)}{I_m} \right| 100 \% \text{ от параметра}$$

регуляризации, который менялся в диапазоне значений  $\alpha_r = 10^{-20} \dots 10^{-10}$  при фиксированных значениях  $M = L = 26$  (4) (рис. 5, а –  $I_m = 1$  мм/ч, рис. 5, б –  $I_m = 20$  мм/ч; сплошная кривая – аппроксимация (15), пунктирная – аппроксимация (13), штриховая – аппроксимация (14)).

Кроме того, как показали результаты численного моделирования, ошибка восстановления интенсивности зависит не только от параметра регуляризации, но также от степеней полинома  $M-1$ ,  $L-1$  при разложении функций  $\sigma_p(\lambda, d)$  и  $N_0(d)$  в (5). В общем случае  $M$  может быть не равно  $L$ , однако для упрощения задачи в работе рассматривается случай, когда  $M = L$ . На рис. 6 показаны результаты восстановления интенсивности дождя в зависимости от степени полинома  $L-1$ , которая меняется в диапазоне значений  $L-1 = 24 \dots 34$  при  $\alpha_r = 10^{-10}$  (рис. 6, а –  $I_m = 1$  мм/ч, рис. 6, б –  $I_m = 20$  мм/ч; сплошная кривая соответствует аппроксимации (15), пунктирная – аппроксимации (13), а штриховая – аппроксимации (14)).

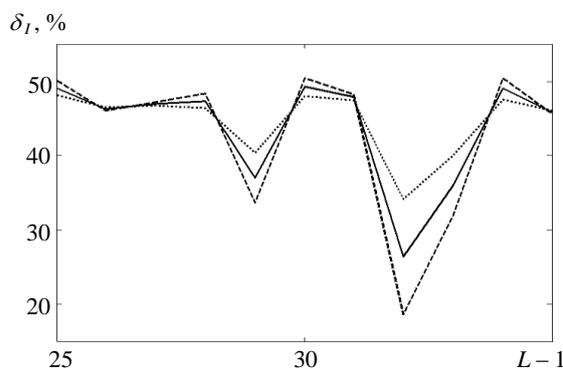


а)

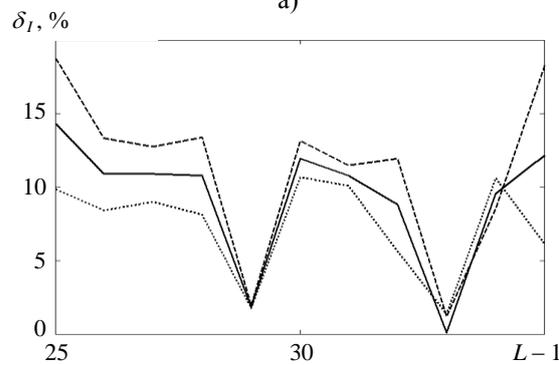


б)

Рис. 5. График зависимости ошибки восстановления интенсивности дождя от параметра регуляризации: а)  $I_m = 1$  мм/ч; б)  $I_m = 20$  мм/ч



а)



б)

Рис. 6. Графики зависимости ошибки восстановления интенсивности дождя от степени полинома  $L-1$ : а)  $I_m = 1$  мм/ч; б)  $I_m = 20$  мм/ч

Из приведенных графиков следует, что ошибка восстановления интенсивности достаточно сильно меняется в зависимости от параметра регуляризации и степени полинома, а характер этой зависимости определяется значением интенсивности дождя, что не позволяет зафиксировать значения этих параметров при решении обратной задачи восстановления интенсивности.

В связи с этим возникает задача определения оптимальных значений параметра регуляризации и степени полинома в ходе решения обратной задачи. Для этого предлагается использовать критерий минимума нормы вектора невязки экспериментально полученных данных двухчастотного зондирования  $\sigma_0(\lambda_1^o), \sigma_0(\lambda_2^o)$  и восстановленных значений удельной ЭПР  $\sigma_0^c(\lambda_1, \alpha_{ri}, L_j), \sigma_0^c(\lambda_L, \alpha_{ri}, L_j)$ :

$$\Delta = \min \left[ \sqrt{\Phi_1 + \Phi_2} \right], \quad (22)$$

где  $\Phi_1 = \left( \sigma_0(\lambda_1^o) - \sigma_0^c(\lambda_1, \alpha_{ri}, L_j) \right)^2$ ,  $\Phi_2 = \left( \sigma_0(\lambda_2^o) - \sigma_0^c(\lambda_L, \alpha_{ri}, L_j) \right)^2$ ,  $i = 1 \dots M_a, j = 1 \dots M_L$  – количество значений параметра регуляризации и степени полинома в некотором выбранном диапазоне соответственно. В выражении (22) восстановленные значения удельной ЭПР  $\sigma_0^c(\lambda_1, \alpha_{ri}, L_j), \sigma_0^c(\lambda_L, \alpha_{ri}, L_j)$  получены на основе решения прямой задачи (4) с использованием решения обратной задачи  $N_0^r(\lambda, d)$  (19) при заданных значениях  $\alpha_{ri}$  и  $L_j$ .

Использование критерия (22) позволяет определить оптимальные значения параметра регуляризации  $\alpha_{ri}$  и степени полинома  $L_j$  из заданных диапазонов их изменения, которые определяются на основе численного моделирования.

**5. Численное моделирование восстановления интенсивности дождя по результатам двухчастотного зондирования.** Рассмотрим ошибку восстановления интенсивности дождя для двухчастотного зондирования в результате решения регуляризированной СЛАУ (19) с использованием критерия (22).

Для формирования экспериментально измеренных значений удельной ЭПР дождя  $\sigma_0(\lambda_1^o), \sigma_0(\lambda_2^o)$  проводилось моделирование рассеяния путем решения прямой задачи (4) для рабочих длин волн  $\lambda_1^o = 0,82$  см,  $\lambda_2^o = 3,2$  см и трех видов распределений капель по размерам (10)–(12). Полученные значения использовались для расчета коэффициентов (16), (17), аппроксимирующих

функции  $\sigma_0^{ap}(\lambda)$  (13)–(15). Остальные параметры моделирования приведены в таблице.

Параметры численного моделирования

Параметр	Значение
Рабочие длины волн	$\lambda_1^o = 0,82$ см, $\lambda_2^o = 3,2$ см
Диапазон интенсивностей	$I_m = 1 \dots 30$ мм/ч
Распределение капель по размерам	гамма-распределение (10); логнормальное распределение (11); распределение Маршала–Пальмера (12)
Диапазон изменения параметра регуляризации	$\alpha_r = 10^{-20} \dots 10^{-10}$
Диапазон изменения степени полинома в разложении функций $\sigma_p(\lambda, d)$ и $N_0(d)$	$L = M = 25 \dots 35$

Как показали данные численного моделирования, наилучшие результаты соответствуют следующим диапазонам изменения регуляризирующего параметра и степени полинома:  $\alpha_r = 10^{-20} \dots 10^{-10}$  и  $L-1 = 24 \dots 34$ .

Результаты численного моделирования приведены на рис. 7, где показана зависимость ошибки восстановления  $\delta_I$  от заданной интенсивности дождя  $I_m$  для различных видов распределений капель по размерам: гамма-распределение – рис. 7, а, логнормальное распределение – рис. 7, б, распределение Маршала–Пальмера – рис. 7, в. Как и на рис. 5 и 6, сплошные кривые соответствуют аппроксимации (15), пунктирные – аппроксимации (13), штриховые – аппроксимации (14). Очевидно, что максимальные ошибки восстановления интенсивности дождя соответствуют области малых интенсивностей (менее 3 мм/ч), для которых с точки зрения практического применения величина ошибки 50...60 % не играет определяющей роли. При этом для гамма-распределения, которое наиболее адекватно описывает распределение капель по размерам в реальных дождях, максимальная ошибка не превышает 20 % для интенсивности дождя  $I > 5$  мм/ч.

Однако предложенный критерий (22) не обеспечивает получение минимально возможной ошибки, хотя и обеспечивает достаточную для практики точность восстановления интенсивности < 20 % для интенсивностей более 5 мм/ч. В частности, на рис. 8 приведены результаты, аналогичные рис. 7, полученные исходя из мини-

мума погрешности восстановления интенсивности дождя, что возможно только на этапе моделирования (если известно истинное распределение капель по размерам).

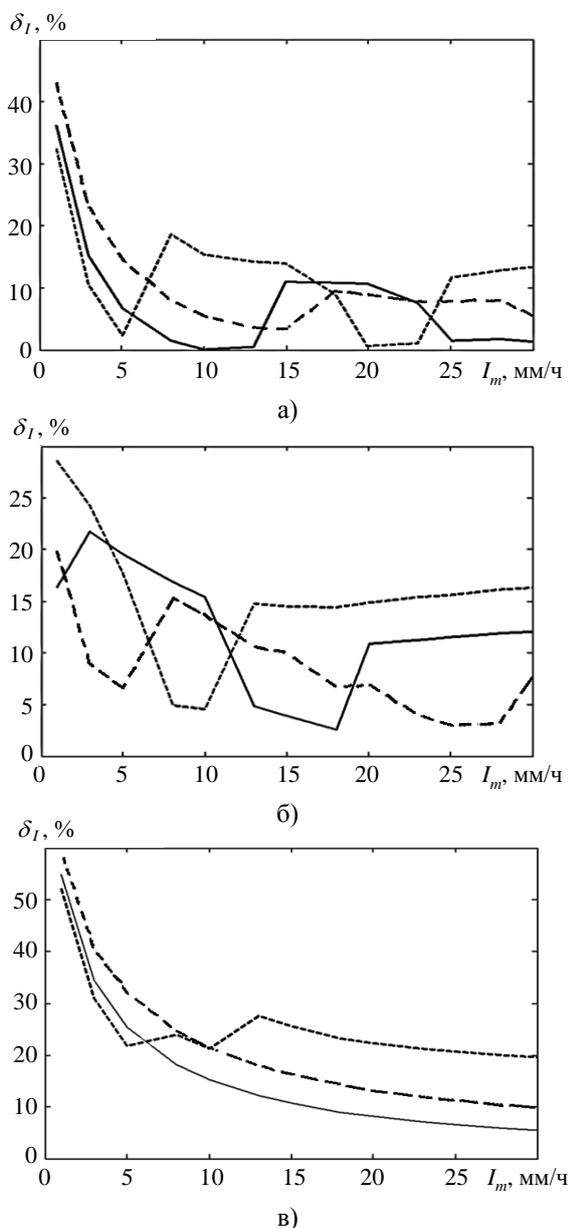


Рис. 7. Графики зависимости ошибки восстановления от интенсивности дождя согласно критерию (22) для различных распределений капель по размерам: а) гамма-распределение; б) логнормальное распределение; в) распределение Маршала-Пальмера

Видно, что в выбранных диапазонах изменения параметра регуляризации ( $\alpha_r = 10^{-20} \dots 10^{-10}$ ) и степени полинома ( $L-1 = 24 \dots 34$ ) существуют их более приемлемые значения, для которых ошибка восстановления значительно ниже, чем полученная при использовании критерия выбора по минимуму нормы вектора невязки (22).

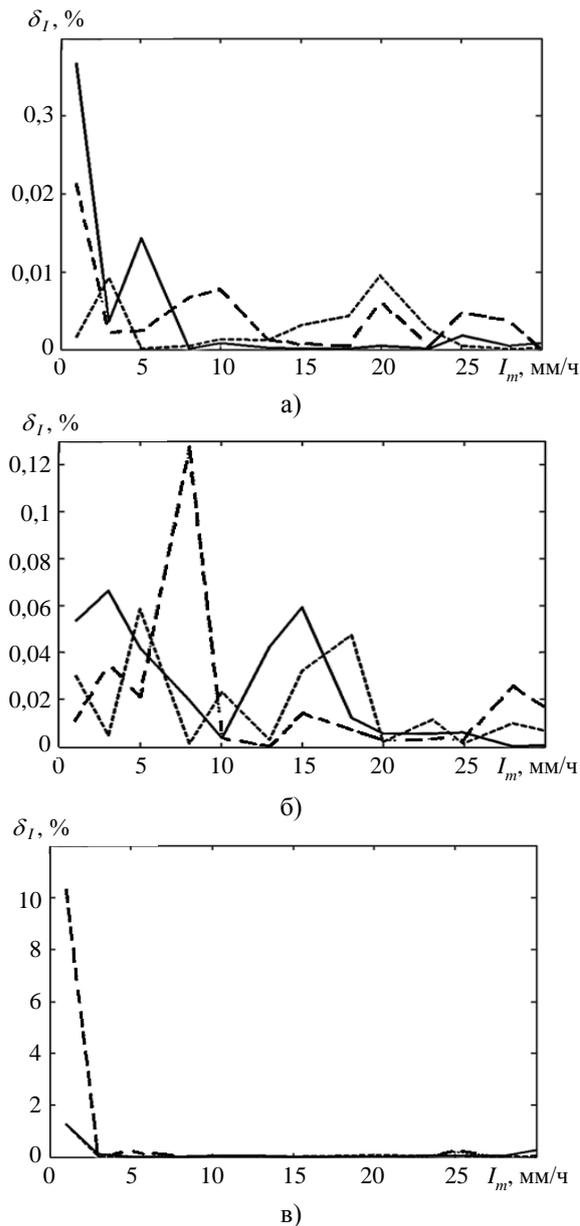


Рис. 8. Графики зависимости ошибки восстановления интенсивности от заданного значения интенсивности дождя: а) гамма-распределение; б) логнормальное распределение; в) распределение Маршала-Пальмера

Также представляет интерес вопрос выбора аппроксимирующей функции (13)–(15) для свободного члена интегрального уравнения. Как показывает анализ, все три типа аппроксимирующих функций приводят к сопоставимым результатам, которые незначительно отличаются для разных интенсивностей и видов распределений. В целом, практически все исследованные аппроксимации свободного члена интегрального уравнения (4) обеспечивают погрешность восстановления в пределах 20 % в диапазоне  $I = 5 \dots 30$  мм/ч, и 20...60 % – для интенсивностей  $I < 5$  мм/ч.

**Выводы.** Показано, что для различных распределений капель дождя по размерам зависимость удельной ЭПР от рабочей длины волны монотонно падает в области  $\lambda > 8$  мм и может быть аппроксимирована двухпараметрическими функциями, параметры которых можно определить с помощью двухчастотного зондирования.

Использование аппроксимации частотной зависимости удельной ЭПР позволяет сформулировать метод решения интегрального уравнения рассеяния радиолокационных сигналов жидкими осадками для восстановления функции распределения капель по размерам и интенсивности дождя.

Проведенное численное моделирование показало, что ошибка восстановления интенсивности дождя зависит от вида аппроксимирующей функции, параметра регуляризации и степени полинома в разложении искомой функции распределения. В связи с этим для выбора значений параметра регуляризации и степени полинома предложено использовать критерий минимума нормы вектора невязки между данными двухчастотного зондирования и результатами восстановления удельной ЭПР в ходе решения обратной задачи.

Показано, что предложенный критерий хотя и не обеспечивает получение минимально возможной ошибки восстановления интенсивности, однако позволяет восстанавливать интенсивность с погрешностью менее 20 % для интенсивностей более 5 мм/ч, которые представляют наибольший практический интерес, и для всех рассмотренных аппроксимаций частотной зависимости удельной ЭПР.

#### Библиографический список

1. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стененко В. Я. Интегральные уравнения. Москва: Наука, 1968. 448 с.
2. Розенберг В. И. Рассеяние и ослабление электромагнитного излучения атмосферными частицами. Ленинград: Гидрометеоздат, 1972.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва: Наука, 1980. 285 с.
4. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Москва: Наука, 1987.
5. Twomey S. Introduction to the mathematics of inversion in remote sensing and indirect measurements. New York: Dover Publ., Inc., 1996. 243 p.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. Москва: Наука, 1979. 285 с.
7. Shifrin K. S., Zolotov I. G. Spectral attenuation and aerosol particle size distribution. *Appl. Opt.* 1996. Vol. 35, N 12. P. 2114–2124.
8. Walters P. T. Practical applications of inverting spectral turbidity data to provide aerosol size distribution. *Appl. Opt.* 1980. Vol. 19, N 14. P. 2353–2365.
9. Westwater E., Cohen A. Application of Backus-Gilbert inversion technique to determination of aerosol size distribution from optical scattering measurements. *Appl. Opt.* 1973. Vol. 12, N 6. P. 1340–1348.
10. Ben-David A., Herman B., Regan J. Inverse problem and the pseudoempirical orthogonal function method of solution. I: Theory. *Appl. Opt.* 1988. Vol. 27, N 7. P. 1235–1243.
11. Koner P. K., Battaglia A., Simmer C. A Rain-Rate Retrieval Algorithm for Attenuated Radar Measurements. *J. Appl. Meteor. Climatol.* 2010. Vol. 49, N 3. P. 381–393.
12. Абшаев М. Т., Дадали Ю. А. О возможностях микроструктурных исследований облаков и осадков радиолокационными методами. *Тр. Высокотехнологического геофизического ин-та.* 1966. Вып. 5. С. 71–85.
13. Линкова А. М., Хлопов Г. И. Использование метода перебора микроструктурных параметров жидких осадков для решения обратных задач восстановления их интенсивности. *Труды УкрНИГМИ.* 2016. Вып. 269. С. 41–48.
14. Mardiana R., Iguchi T., Takahashi N. A dual-frequency rain profiling method without the use of a surface reference technique. *IEEE Trans. Geosc. and Remote Sens.* 2004. Vol. 42, N 10. P. 2214–2225.
15. Степаненко В. Д. Радиолокация в метеорологии. Ленинград: Гидрометеоздат, 1973. 344 с.
16. Gunn R., Kinzer G.D. The terminal velocity of fall for water droplets in stagnant air. *J. Meteorol.* 1949. Vol. 6. P. 243–248.
17. Ван-де-Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами: пер. с англ. Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. 536 с.
18. Айвазян Г. М. Распространение миллиметровых и субмиллиметровых волн в облаках. Ленинград: Гидрометеоздат, 1991. 480 с.
19. Левин Л. М. Исследование по физике грубодисперсных аэрозолей. Москва: Изд-во АН СССР, 1961. 267 с.
20. Marshall J. S., Palmer W. M. The distribution of raindrops with size. *J. Meteor.* 1948. Vol. 5. P. 165–166.
21. Жданов А. И. Введение в методы решения некорректных задач: учебное пособие. Самара: Изд-во Самарского гос. аэрокосмического ун-та, 2006. 87 с.

#### REFERENCES

1. Zabreyko, P. P., Koshelev, A. I., Krasnosel'skiy, M. A., Mikhailin, S. G., Rakovshchik, L. S., Stetsenko, V. Ya., 1968. *Integral equations*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
2. Rozenberg, V. I., 1972. *Scattering and attenuation of electromagnetic radiation by atmospheric particles*. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ. (in Russian).
3. Lavrentiev, M. M., Romanov, V. G., Shishatskiy, S. P., 1980. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
4. Morozov, V. A., 1987. *Regular methods for solving the ill-posed problems*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
5. Twomey, S., 1996. *Introduction to the mathematics of inversion in remote sensing and indirect measurements*. New York: Dover Publ.
6. Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Ya., 1979. *Methods for solving the ill-posed problems*. 2nd ed. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
7. Shifrin, K. S., Zolotov, I. G., 1996. Spectral attenuation and aerosol particle size distribution. *Appl. Opt.*, **35**(12), pp. 2114–2124.
8. Walters, P. T., 1980. Practical applications of inverting spectral turbidity data to provide aerosol size distribution. *Appl. Opt.*, **19**(14), pp. 2353–2365.
9. Westwater, E., Cohen, A., 1973. Application of Backus-Gilbert inversion technique to determination of aerosol size distribution from optical scattering measurements. *Appl. Opt.*, **12**(6), pp. 1340–1348.
10. Ben-David, A., Herman, B., Regan, J., 1988. Inverse problem and the pseudoempirical orthogonal function method of solution. I: Theory. *Appl. Opt.*, **27**(7), pp. 1235–1243.
11. Koner, P. K., Battaglia, A., Simmer, C., 2010. A Rain-Rate Retrieval Algorithm for Attenuated Radar Measurements. *J. Appl. Meteor. Climatol.*, **49**(3), pp. 381–393.
12. Abshaev, M. T., Dadali, Yu. A., 1966. About the possibilities of microstructural studies of clouds and precipitation by radar

- methods. *Trudy Vysokogornogo geofisicheskogo Instituta*, **5**, pp. 71–85 (in Russian).
13. Linkova, A. M., Khlopov, G. I., 2016. Use of the exhaustive search of microstructure parameters of liquid precipitation for solving the inverse problems of recovering their intensity. *Naukovi praci Ukraïns'kogo gidrometeorologichnogo institutu*, **269**, pp. 41–48 (in Russian).
  14. Mardiana, R., Iguchi, T., Takahashi, N., 2004. A dual-frequency rain profiling method without the use of a surface reference technique. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, **42**(10), pp. 2214–2225.
  15. Stepanenko, V. D., 1973. *Radiolocation in meteorology*. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ. (in Russian).
  16. Gunn, R., Kinzer, G. D., 1949. The terminal velocity of fall for water droplets in stagnant air. *J. Meteor.*, **6**(4), pp. 243–248.
  17. Van de Hulst, H. C., 1961. *Light scattering by small particles*. Translated and ed. from English by T. V. Vodop'yanova. Moscow: Inostrannaya literatura Publ. (in Russian).
  18. Aivazyan, G. M., 1991. *Propagation of millimeter and submillimeter waves in clouds*. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ. (in Russian).
  19. Levin, L. M., 1961. *A study on the physics of coarsely dispersed aerosols*. Moscow: AN SSSR Publ. (in Russian).
  20. Marshall, J. S., Palmer, W. M., 1948. The distribution of raindrops with size. *J. Meteor.*, **5**, pp. 165–166.
  21. Zhdanov, A. I., 2006. *Introduction to the methods of solving the ill-posed problems: a tutorial*. Samara: Izdatel'stvo Samar'skogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta (in Russian).

*Рукопись поступила 22.08.2017.*

A. M. Linkova

#### RETRIEVAL OF RAIN INTENSITY BY SOLUTION OF INTEGRAL EQUATION OF SCATTERING IN THE CASE OF DOUBLE FREQUENCY SENSING

Measurement of precipitation amount is of great interest for solution of many practical problems of national economy

and agriculture. In this case, the inverse problem of recovering the rain intensity using radar methods is an incorrect problem of mathematical physics and is described by a nonlinear integral equation. An approach for solving the integral equation of the electromagnetic waves scattering by a polydisperse medium of water drops is considered by means of double frequency remote sensing in the microwave range. Numerical simulation for retrieval of rain intensity in the range of 1...30 mm/h is performed for operating wavelengths 0.82 and 3.2 cm. It is shown that the proposed approach permits to retrieve the rain intensity with an error less than 20 % for intensities > 5 mm/h and with an error up to 60 % for light rains (less than 5 mm/h).

**Key words:** rain intensity, radar, double frequency sensing, радар, двухчастотное зондирование, Fredholm integral equation of the first kind, Tikhonov regularization.

Г. М. Лінкова

#### ВІДНОВЛЕННЯ ІНТЕНСИВНОСТІ ДОЩУ ШЛЯХОМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ РОЗСІЮВАННЯ ПРИ ДВОЧАСТОТНОМУ ЗОНДУВАННІ

Вимірювання кількості опадів становить значний інтерес для вирішення багатьох практичних завдань. Обернена задача відновлення інтенсивності дощу за допомогою радіолокаційних методів належить до некоректних задач математичної фізики й описується нелінійним інтегральним рівнянням. У роботі розглядається підхід до розв'язання інтегрального рівняння розсіювання електромагнітних хвиль полідисперсним середовищем водних крапель за допомогою двочастотного зондування у НВЧ-діапазоні. Проведено числове моделювання відновлення інтенсивності дощу в діапазоні 1...30 мм/год для робочих довжин хвиль 0,82 і 3,2 см. Показано, що запропонований підхід дозволяє відновлювати інтенсивність дощу з похибкою менше 20 % для інтенсивності більше 5 мм/год та 60 % для слабких дощів (менше 5 мм/год).

**Ключові слова:** інтенсивність дощу, радар, двочастотне зондування, інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду, регуляризація Тихонова.