

С. С. Апостолов^{1,2}, Д. В. Кадыгроб^{1,2}, З. А. Майзеліс^{1,2}, А. А. Николаенко¹, А. А. Шматько¹,
В. А. Ямпольський^{1,2}

¹Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

²Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

4, пл. Свободы, Харьков, 61022, Украина

E-mail: yam@ire.kharkov.ua

НОРМАЛЬНАЯ И АНОМАЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ МОД В ПЛАСТИНЕ СЛОИСТОГО СВЕРХПРОВОДНИКА

Теоретически исследуются слабонелинейные локализованные электромагнитные моды в пластине слоистого сверхпроводника. Предполагается, что пластина находится в однородном диэлектрическом окружении, сверхпроводящие слои перпендикулярны поверхности пластины, а моды распространяются поперек слоев. Благодаря сильной анизотропии джозефсоновской плазмы в слоистых сверхпроводниках, локализованные моды могут обладать необычными дисперсионными свойствами.

Электромагнитное поле в слоистом сверхпроводнике определяется распределением калибровочно-инвариантной разности фаз параметра порядка, которая удовлетворяет системе связанных синусоидальных уравнений Гордона. На основании решения этих уравнений, а также уравнений Максвелла в диэлектрическом окружении, могут быть получены дисперсионные соотношения для локализованных электромагнитных мод.

Установлено, что в определенном диапазоне параметров дисперсия локализованных мод оказывается аномальной. На дисперсионных кривых обнаружены точки, в которых групповая скорость мод может обращаться в нуль. Кроме того, нелинейность приводит к тому, что дисперсионные соотношения содержат амплитуду локализованной моды.

Благодаря тому, что в нелинейном случае дисперсионные соотношения содержат амплитуду локализованной моды, открывается возможность для наблюдения явления остановки света локализованных мод в пластине слоистого сверхпроводника. Ил. 4. Библиогр.: 25 назв.

Ключевые слова: слоистый сверхпроводник, локализованные моды, аномальная дисперсия.

Все известные в настоящее время высокотемпературные сверхпроводники характеризуются очень большой анизотропией, которая проявляется в их слоистой структуре. Например, сильно анизотропный высокотемпературный сверхпроводник $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ состоит из очень тонких ($\sim 2 \text{ \AA}$) сверхпроводящих слоев CuO_2 , чередующихся с более толстыми диэлектрическими слоями ($\sim 15 \text{ \AA}$), причем между сверхпроводящими слоями существует слабая джозефсоновская связь [1, 2]. Взаимодействие джозефсоновского туннелирующего тока, текущего поперек слоев, с электромагнитным полем приводит к существованию особого вида элементарных возбуждений, так называемых джозефсоновских плазменных волн (ДПВ) [3]. Характерные частоты этих волн соответствует терагерцевому диапазону, который очень важен с точки зрения различных приложений [4, 5], что определяет не только научный, но и практический интерес к джозефсоновским плазменным колебаниям [6, 7].

Обратим внимание на то, что благодаря нелинейной зависимости плотности джозефсоновского тока от разности фаз параметра порядка между сверхпроводящими слоями, слоистый сверхпроводник представляет собой плазменную среду, проявляющую нелинейные свойства. Поэтому можно ожидать, что в таких материалах можно наблюдать эффекты, характерные для нелинейной оптики, такие как самофокусировка электро-

магнитных волн, стимулированная прозрачность, эффект остановки света и другие [8, 9]. Некоторые из нелинейных эффектов в слоистых сверхпроводниках были теоретически предсказаны и исследованы в работах [10–13]. В частности, в работе [13] изучены нелинейные электромагнитные моды, локализованные на пластине слоистого сверхпроводника, сверхпроводящие слои которого параллельны поверхности пластины. Показано, что такие моды в нелинейном режиме могут обладать аномальной дисперсией, зависящей от амплитуды моды.

Отметим, что в системе, содержащей среду с аномальной дисперсией, может возникнуть эффект отрицательного преломления света. Материалы с отрицательным показателем преломления в последнее время очень активно изучаются после теоретического предсказания возможности так называемой идеальной фокусировки света [14–16]. В определенном частотном диапазоне компоненты эффективного тензора диэлектрической проницаемости слоистого сверхпроводника вдоль и поперек слоев имеют разные знаки. Благодаря такой специфической особенности в слоистом сверхпроводнике может наблюдаться отрицательное преломление электромагнитных волн [17, 18].

В недавней работе [19] были рассмотрены линейные электромагнитные моды, локализованные в пластине слоистого сверхпроводника, сверхпроводящие слои которого перпендикулярны по-

верхности пластины. За счет указанной выше сильной анизотропии слоистых сверхпроводников оказывается, что в такой геометрии локализованные моды могут обладать аномальной дисперсией. Это позволяет ожидать, что и в нелинейном режиме локализованные моды должны обладать аномальной дисперсией и иметь свойства, зависящие от их амплитуды.

В данной работе теоретически изучены слабо-нелинейные электромагнитные моды, локализованные в пластине слоистого сверхпроводника, сверхпроводящие слои которого перпендикулярны поверхности пластины. Пластина окружена однородным диэлектриком, а моды распространяются поперек сверхпроводящих слоев. Получены дисперсионные соотношения для локализованных мод, содержащие амплитуду моды и представляющие аномальную дисперсию в определенном диапазоне параметров. Показано, что с помощью изменения амплитуды можно управлять аномальными свойствами волны. В результате открывается возможность наблюдать эффекты отрицательного преломления и остановки света.

Статья построена следующим образом. В первом разделе представлена постановка задачи, описана геометрия системы и определены электромагнитные поля в диэлектрике и слоистом сверхпроводнике. Второй раздел посвящен выводу дисперсионных соотношений для симметричных и антисимметричных по магнитному полю мод в слабо нелинейном режиме. В третьем разделе представлен анализ полученных дисперсионных соотношений, а также результаты численной симуляции.

1. Постановка задачи. Пусть пластина слоистого сверхпроводника толщиной L находится в диэлектрическом окружении с проницаемостью ϵ_d (рис. 1). Система координат выбрана таким образом, что оси x и y лежат в плоскости слоев ab , а ось z совпадает с кристаллографической осью c . Пластина граничит с диэлектриком при $x = \pm L/2$.

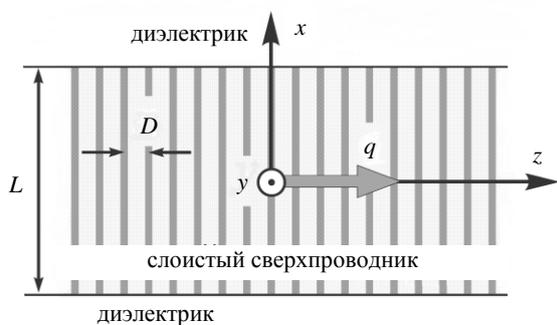


Рис. 1. Геометрия задачи. Волна с продольной компонентой волнового вектора q распространяется вдоль пластины слоистого сверхпроводника толщины L , помещенной в диэлектрик с проницаемостью ϵ_d

Рассмотрим собственные локализованные электромагнитные моды TM -поляризации с частотой ω и продольной компонентой волнового вектора q , распространяющиеся в пластине слоистого сверхпроводника поперек сверхпроводящих плоскостей. Магнитное и электрическое поля в такой волне представляются в виде:

$$\begin{aligned} \vec{H}(x, y, z, t) &= \{0, H_y(x), 0\} \exp(iqz - i\omega t), \\ \vec{E}(x, y, z, t) &= \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp(iqz - i\omega t). \end{aligned} \quad (1)$$

Электромагнитное поле мод, локализованных в пластине слоистого сверхпроводника, в диэлектрике, согласно уравнениям Максвелла, должно экспоненциально ослабляться при удалении от границы пластины аналогично полю поверхностных мод на границе раздела «диэлектрик – полубесконечный слоистый сверхпроводник» [20]. В рассматриваемой здесь геометрии наличие второй границы приводит к тому, что электромагнитное поле в слоистом сверхпроводнике может как экспоненциально затухать, так и осциллировать поперек пластины. В первом случае мы будем называть моды поверхностными, а во втором случае – волноводными. Благодаря симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$, мы можем искать решение в виде симметричных и антисимметричных по магнитному полю мод.

1.1. Поля в диэлектрике. Как уже упоминалось выше, электромагнитное поле искомой волны экспоненциально затухает в диэлектрике при удалении от поверхности пластины, поэтому выражение для y -компоненты магнитного поля можно записать в следующем виде:

$$H_y^\pm = h^\pm \exp[k_d(\mp x + L/2)] \sin(qz - \omega t), \quad (2)$$

где h^\pm – амплитуда волны; верхние индексы «+» и «-» соответствуют полупространствам $x > L/2$ и $x < -L/2$.

Из уравнений Максвелла находим z -компоненту электрического поля в диэлектрике

$$E_z^\pm = \mp \frac{ck_d}{\omega \epsilon_d} h^\pm \exp[k_d(\mp x + L/2)] \cos(qz - \omega t) \quad (3)$$

и выражение для декремента затухания k_d электромагнитных волн в диэлектрическом полупространстве

$$k_d = \sqrt{q^2 - \epsilon_d \omega^2 / c^2}. \quad (4)$$

1.2. Поля в слоистом сверхпроводнике. Электромагнитное поле в слоистом сверхпроводнике определяется распределением калибровочно-инвариантной разности фаз $\varphi(x, z, t)$ параметра порядка между сверхпроводящими плоскостями, которая удовлетворяет системе связанных синусоидальных уравнений Гордона [21]. В конти-

нуальном пределе для монохроматических волн $\varphi(x, z, t) \propto \exp(-i\omega t)$ эта система сводится к уравнению

$$\left(1 - \Lambda_{ab}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left[\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \sin \varphi \right] - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

где λ_{ab} и $\lambda_c = c/(\omega_J \sqrt{\varepsilon_s})$ – лондоновские глубины проникновения магнитного поля вдоль и поперек слоев, соответственно. Джозефсоновская плазменная частота $\omega_J = \sqrt{8\pi e D J_c / \hbar \varepsilon_s}$ определяется максимальной плотностью джозефсоновского тока J_c , пространственным периодом сверхпроводящей структуры D и межслойной диэлектрической проницаемостью ε_s . Заметим, что в уравнении (5) учтен ток смещения вдоль сверхпроводящих плоскостей, приводящий к модификации лондоновской глубины Λ_{ab} проникновения вдоль слоев. В случае монохроматической волны с нормированной частотой $\Omega = \omega / \omega_J$, она принимает вид:

$$\Lambda_{ab}^2 = \lambda_{ab}^2 / (1 - \Omega^2 / \gamma^2). \quad (6)$$

При достаточном низких частотах из-за большого значения параметра анизотропии $\gamma = \lambda_c / \lambda_{ab} \gg 1$ членом Ω^2 / γ^2 в знаменателе можно пренебречь, и тогда $\Lambda_{ab} \approx \lambda_{ab}$. Тем не менее, если нормированная частота Ω окажется сравнима по величине с γ , то этот вклад необходимо учитывать. Для висмутового сверхпроводника $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ параметр анизотропии γ достигает значений порядка 100, однако в соединениях $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ – не более 10.

Отметим, что компонента электрического поля поперек слоев может вызывать нарушение электронейтральности сверхпроводящих плоскостей, что приводит к дополнительной, так называемой емкостной, связи между ними. Этой связью можно пренебречь в тех случаях, когда мал параметр емкостной связи $\alpha = R_D^2 \varepsilon_s / sd$, где R_D – дебаевский радиус экранировки, а s и d – толщины сверхпроводящего и диэлектрического слоев, соответственно, $s + d = D$ (см. работу [22], в которой получено дисперсионное уравнение для джозефсоновских плазменных волн с учетом емкостной связи). Например, согласно теоретическим оценкам, для кристаллов $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ величина $\alpha \sim 0,05 \dots 0,1$.

Связь градиентно-инвариантной разности фаз $\varphi(x, z, t)$ с компонентами электромагнитного поля можно получить из уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2\pi D}{\Phi_0} \left(1 - \Lambda_{ab}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) H_y^s, \quad E_z^s = \frac{\Phi_0}{2\pi D} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (7)$$

где $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ – квант магнитного потока. Первое из уравнений (7) описывает изменение фазы φ в системе джозефсоновских контактов в зависимости от приложенного магнитного поля – аналог уравнения Феррелла–Прейнджа для одиночного контакта, а второе из уравнений (7) – следствие известного соотношения Джозефсона, $2eV = \hbar \partial \varphi / \partial t$ [23]. Дополнительное слагаемое $\Lambda_{ab}^2 \partial^2 / \partial z^2$ в слоистом сверхпроводнике отвечает за так называемую индуктивную связь между слоями. Отметим, что в уравнениях (5) и (7) мы опустили релаксационные члены, обусловленные диссипативной проводимостью квазичастиц вдоль и поперек слоев.

В нашей задаче предполагается, что амплитуда магнитного поля волны существенно меньше критического значения $\mathcal{H}_0 = \Phi_0 / 2\pi D \lambda_c$, при котором начинается проникновение джозефсоновских вихрей в слоистый сверхпроводник. Поскольку калибровочно-инвариантная разность фаз $\varphi(x, z, t)$ связана с компонентами электромагнитных полей посредством уравнений (7), а амплитуды полей предполагаются малыми, то можно считать, что амплитуда фазы также мала, $|\varphi| \ll 1$. Тогда слагаемое $\sin \varphi$ в уравнении (5) можно приближенно аппроксимировать кубической зависимостью $\varphi - \varphi^3/6$. Как было показано в работе [10], при частотах, близких к ω_J , нелинейный член φ^3 , возникающий в уравнении (5) при разложении $\sin \varphi$, может иметь тот же порядок малости, что и сумма линейных членов. Таким образом, оказывается, что даже слабая нелинейность может существенно повлиять на распространение ДПВ, если частота волны близка к плазменной.

Будем искать решение уравнения (5) в виде:

$$\varphi(x, z, t) = a(x) \sin(qz - \omega t). \quad (8)$$

Как показано в работе [10], потерями, связанными с генерацией кратных гармоник с частотами $3\omega, 5\omega, 7\omega, \dots$, при малых $a(x)$ можно пренебречь. Это позволяет заменить нелинейный член $\varphi^3 = a^3 \sin^3(qz - \omega t)$ на $\varphi^3 = (3/4)a^3 \sin(qz - \omega t)$, отбрасывая слагаемые, содержащие более высокие частоты. В итоге получаем уравнение для амплитуды $a(x)$:

$$a'' + \kappa_0^2 a + \beta a^3 = 0, \quad (9)$$

где штрих обозначает производную по x ,

$$\kappa_0^2 = \frac{(\Omega^2 - 1)(1 + \Lambda_{ab}^2 q^2)}{\lambda_c^2}, \quad \beta = \frac{1 + \Lambda_{ab}^2 q^2}{8\lambda_c^2}. \quad (10)$$

Величина κ_0^2 при $\Omega < 1$ и $\Omega > 1$ имеет разные знаки, поэтому характер решений в этих двух

случаях оказывается разным. Они будут рассмотрены отдельно в следующем разделе.

Компоненты электромагнитного поля могут быть выражены через амплитуду $a(x)$ с помощью уравнений (7). Подставляя $\varphi(x, z, t)$ в виде (8) и предполагая, что $H_y^s \propto \sin(qz - \omega t)$, находим:

$$H_y^s(x, z, t) = H_0 \frac{a'(x)\lambda_c}{(1 + \Lambda_{ab}^2 q^2)} \sin(qz - \omega t), \quad (11)$$

$$E_z^s(x, z, t) = -H_0 \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon_s}} a(x) \cos(qz - \omega t).$$

Как было отмечено выше, в симметричной геометрии локализованные моды обязательно обладают симметрией, они могут быть симметричными или антисимметричными по магнитному полю. Поскольку магнитное поле $H_y^s(x) \propto a'(x)$, то решения уравнения (9) также обладают симметрией. При этом нужно использовать два граничных условия в середине образца:

$$a'(x=0) = 0 - \quad (12)$$

для симметричных, или

$$a(x=0) = 0 - \quad (13)$$

для антисимметричных по магнитному полю мод.

2. Дисперсионные соотношения. Для нахождения дисперсионных соотношений для локализованных мод необходимо приравнять тангенциальные компоненты полей на границе «слоистый сверхпроводник – диэлектрик» и исключить из уравнений неизвестную амплитуду h^+ в диэлектрике. Тот же результат получим, если приравнять поверхностные импедансы диэлектрика и сверхпроводника. Поскольку геометрия задачи обладает симметрией относительно середины образца (плоскости $x=0$), то достаточно записать это соотношение только на одной из границ (например, на верхней) при $x=L/2$:

$$\frac{E_z^+}{H_y^s} \Big|_{x=L/2} = \frac{E_z^s}{H_y^s} \Big|_{x=L/2}. \quad (14)$$

Подставляя соответствующие выражения для полей (2), (3) и (11) в уравнение (14), находим следующее соотношение:

$$\frac{a(x)}{a'(x)} \Big|_{x=L/2} = \frac{\varepsilon_s k_d}{\varepsilon_d \kappa_0^2} (1 - \Omega^{-2}). \quad (15)$$

Соотношение (15) совместно с дифференциальным уравнением (9) и одним из граничных условий, (12) или (13), определяет дисперсию нелинейных локализованных мод. Уравнение (9) представляет собой уравнение ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью – ос-

циллятор Дюффинга [24]. Для дальнейшего анализа мы воспользуемся приближенными методами, применимыми в режиме слабой нелинейности.

Как известно, метод нахождения слабонелинейных решений осциллятора Дюффинга в виде прямого разложения для амплитуды дает так называемые секулярные (вековые) члены, расходящиеся в каждом порядке теории возмущения. Поэтому следует использовать схему решения, описанную в [25], таким образом, чтобы учитывать неизохорность:

$$a = a_0 + a_1 + \dots, \quad a_0 \gg a_1 \gg \dots, \quad (16)$$

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \dots, \quad \kappa_0 \gg \kappa_1 \gg \dots$$

Первые члены разложения (с нулевым индексом) представляют собой амплитуду и частоту линейных колебаний. Последующие поправки учитывают эффекты неизохорности.

2.1. Слабонелинейные моды при $\Omega > 1$. В этом случае решение уравнения (9) в линейном приближении имеет вид тригонометрических функций:

$$a_0(x) = A \cos(\kappa_0 x),$$

$$a_0(x) = A \sin(\kappa_0 x) -$$

для антисимметричного и симметричного по магнитному полю решений, соответственно. Вычисляя поправки следующего порядка, находим:

$$a = A \cos(\kappa x) + \frac{A^3 \beta}{32 \kappa_0^2} \cos(3\kappa x), \quad (17)$$

$$a = A \sin(\kappa x) + \frac{A^3 \beta}{32 \kappa_0^2} \sin(3\kappa x) -$$

для антисимметричного и симметричного решений. Здесь

$$\kappa = \kappa_0 \left(1 + \frac{3 A^2 \beta}{8 \kappa_0^2} \right).$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (15), получаем дисперсионные соотношения

$$\left[\frac{\kappa_0}{\kappa} - \frac{A^2 \beta}{4 \kappa_0^2} \cos^2 \frac{\kappa L}{2} \right] \operatorname{ctg} \frac{\kappa L}{2} = \frac{\varepsilon k_d}{\kappa_0} (\Omega^{-2} - 1), \quad (18)$$

$$\left[\frac{\kappa_0}{\kappa} - \frac{A^2 \beta}{4 \kappa_0^2} \cos^2 \frac{\kappa L}{2} \right] \operatorname{tg} \frac{\kappa L}{2} = \frac{\varepsilon k_d}{\kappa_0} (1 - \Omega^{-2}) -$$

для антисимметричных и симметричных локализованных мод, соответственно. Здесь $\varepsilon = \varepsilon_s / \varepsilon_d$.

Обратим внимание на то, что в линейном режиме $A \rightarrow 0$ и выражения в квадратных скобках обращаются в 1. В этом случае дисперсионные соотношения совпадают с полученными в работе [19].

2.1. Слабонелинейные моды при $\Omega < 1$. В этом случае уравнение (9) перепишем в следующем виде:

$$a'' - \varkappa_0^2 a + \beta a^3 = 0,$$

где κ_0 – вещественный параметр,

$$\kappa_0^2 = -\kappa_0^2 = \frac{(1-\Omega^2)(1+\Lambda_{ab}^2 q^2)}{\lambda_c^2}.$$

Действуя аналогично предыдущему подразделу, получаем дисперсионные соотношения, содержащие гиперболические функции:

$$\left[\frac{\kappa_0}{\kappa} + \frac{A^2 \beta}{4\kappa_0^2} \cos^2 \frac{\kappa L}{2} \right] \operatorname{cth} \frac{\kappa L}{2} = \frac{\varepsilon k_d}{\kappa_0} (\Omega^{-2} - 1),$$

$$\kappa = \kappa_0 \left(1 - \frac{3 A^2 \beta}{8 \kappa_0^2} \right) -$$

для антисимметричных и

$$\left[\frac{\kappa_0}{\kappa} - \frac{A^2 \beta}{4\kappa_0^2} \cos^2 \frac{\kappa L}{2} \right] \operatorname{th} \frac{\kappa L}{2} = \frac{\varepsilon k_d}{\kappa_0} (\Omega^{-2} - 1),$$

$$\kappa = \kappa_0 \left(1 + \frac{3 A^2 \beta}{8 \kappa_0^2} \right) -$$

для симметричных локализованных мод, соответственно.

3. Анализ дисперсионных кривых. Поскольку дисперсия локализованных мод зависит от их амплитуды, удобно построить график дисперсионных кривых, зафиксировав нормированную энергию моды \mathcal{E} в поперечном сечении,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi \mathcal{H}_0^2 L} \int_0^L \langle \vec{E} \times \vec{D} + \vec{H} \times \vec{B} \rangle_t dx, \quad (21)$$

где $\langle \dots \rangle_t$ обозначает усреднение по времени, вектор магнитной индукции \vec{B} совпадает с вектором напряженности \vec{H} , а вектор электрической индукции зависит от среды, в которой мы его вычисляем. Для диэлектрика $\vec{D} = \varepsilon_d \vec{E}$, а для слоистого сверхпроводника связь между \vec{D} и \vec{E} анизотропна:

$$D_x^s = \varepsilon_{xx} E_x^s, \quad D_z^s = \varepsilon_{zz} E_z^s,$$

где ε_{xx} и ε_{zz} – компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости слоистого сверхпроводника [20],

$$\varepsilon_{xx}(\omega) = \varepsilon_s - \frac{c^2}{\lambda_{ab}^2 \omega^2}, \quad \varepsilon_{zz}(\omega) = \varepsilon_s - \frac{c^2}{\lambda_c^2 \omega^2}.$$

Подставляя в уравнение (21) выражения для полей в диэлектрике (2)–(3) и в слоистом сверхпроводнике (7), а также исключая амплитуду h^\pm магнитного поля в диэлектрике с помощью условия непрерывности магнитного поля на границе, можно связать нормированную энергию \mathcal{E} с квадратом амплитуды моды: $\mathcal{E} \propto A^2$. Здесь в ре-

жиме слабой нелинейности коэффициент пропорциональности зависит только от параметров задачи, но не от амплитуд полей.

На рис. 2 представлены дисперсионные кривые для линейного случая (сплошные линии) и для слабонелинейного случая (штриховые линии) при следующих значениях параметров, которые соответствуют кристаллам $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$: $\varepsilon_d = 4$, $\varepsilon_s = 16$, $\gamma = 5$, $L = 5\lambda_c$, $\mathcal{E} = 0,02$. Видно, что все кривые, кроме самой нижней для $n=0$, имеют область возрастания, где наблюдается нормальная дисперсия, $d\omega/dq > 0$, и область убывания, где дисперсия аномальна, $d\omega/dq < 0$. Эти кривые имеют точку максимума, в которой групповая скорость волн $v_g = d\omega/dq$ становится равной нулю.

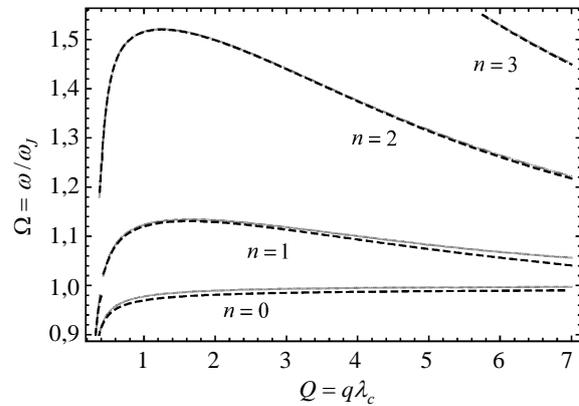


Рис. 2. Дисперсионные кривые, описываемые уравнениями (18)–(20)

Самая нижняя кривая для $n=0$ расположена полностью в области $\Omega < 1$ и монотонно возрастает в линейном случае. Отметим также, что небольшая область на кривой для $n=1$ вблизи $\Omega=1$ вырезана вследствие того, что режим слабой нелинейности нарушается вблизи $\Omega=1$ в том случае, если энергия моды относительно велика. Другими словами, чем ближе мы приближаемся к $\Omega=1$, тем меньшая энергия волны удовлетворяет режиму слабой нелинейности. Изучим более подробно две нижние кривые. При определенных значениях толщины образца, когда $L \sim \varepsilon_s \lambda_c^2 / \varepsilon_d \lambda_{ab}$, обе кривые располагаются в области $\Omega < 1$. На рис. 3 изображены дисперсионные кривые для $n=0$ и $n=1$ при значении нормированной энергии $\mathcal{E} = 10^{-5}$ и $L = 24\lambda_c$, остальные параметры такие же, как и на рис. 2. При этом кривая для $n=1$ имеет как точку максимума, так и точку минимума. В нелинейном случае кривые модифицируются так, что на кривой для $n=0$ появляется точка максимума, но

при этом уменьшается глубина минимума на кривой для $n = 1$.

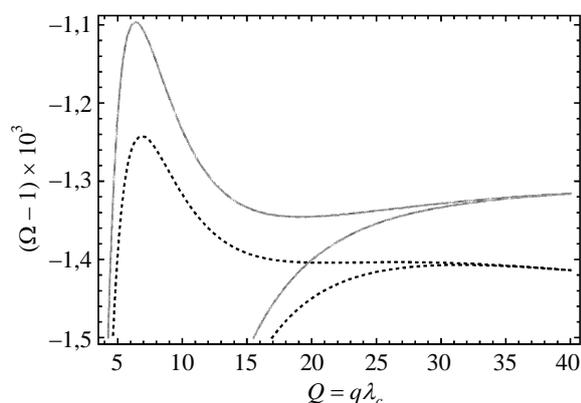


Рис. 3. Дисперсионные кривые для $n = 0$ и $n = 1$ в увеличенном масштабе

Обратим внимание на то, что возможность управления минимумами и максимумами на дисперсионных кривых позволяет настроить систему для наблюдения явления остановки света. Рассмотрим локализованную моду, которая распространяется вдоль пластины, и предположим, что нормированная энергия этой волны изменяется при распространении (например, убывает вследствие диссипации или возрастает при внешней накачке). В этом случае волновой вектор волны меняется при изменении нормированной энергии.

На рис. 4 изображена зависимость волнового числа $Q = q\lambda_c$ для дисперсионной кривой для $n = 1$ от нормированной энергии \mathcal{E} при фиксированном значении частоты $\Omega = 1 - 1,37 \cdot 10^{-3}$.

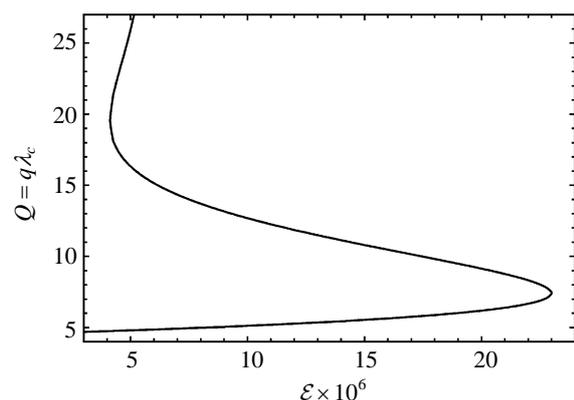


Рис. 4. График зависимости волнового числа $Q = q\lambda_c$ для дисперсионной кривой для $n = 1$ от нормированной энергии локализованной моды при фиксированном значении частоты

Предположим, что $\mathcal{E} = 10^{-5}$, а волновой вектор равен примерно $Q \approx 13,1$. Пусть энергия волны уменьшается, тогда при достижении энергией

величины $\mathcal{E} \approx 4,2 \cdot 10^{-6}$ дальнейшее непрерывное изменение Q невозможно и волна дальше распространяться не может. Аналогичная ситуация будет наблюдаться, если энергия возрастает при распространении: при достижении энергией величины $\mathcal{E} \approx 23 \cdot 10^{-6}$ дальнейшее изменение Q невозможно. Таким образом, нелинейность приводит к явлению остановки света.

Выводы. В данной работе теоретически исследованы нелинейные локализованные электромагнитные моды в пластине слоистого сверхпроводника. Рассмотрена геометрия, в которой пластина находится в однородном диэлектрическом окружении, сверхпроводящие слои перпендикулярны поверхности пластины, а моды распространяются поперек слоев. Получены дисперсионные соотношения для мод в режиме слабой нелинейности, и установлено, что в определенном диапазоне параметров дисперсия таких локализованных мод оказывается аномальной. Кроме того, показано, что в определенных точках дисперсионных кривых групповая скорость мод может обращаться в нуль. Благодаря тому, что в нелинейном случае дисперсионные соотношения содержат амплитуду локализованной моды, открывается возможность для наблюдения явления остановки света локализованных мод в пластине слоистого сверхпроводника, которым можно управлять, меняя амплитуду волны.

Работа содержит результаты, полученные в рамках проекта фундаментальных и прикладных исследований и научно-технических (экспериментальных) разработок высших учебных заведений, которые относятся к сфере управления МОН Украины, а также при грантовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований по конкурсному проекту Ф76/33683.

Библиографический список

1. Kleiner R., Steinmeyer F., Kunkel G., Muller P. Intrinsic Josephson effects in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ single crystals. *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68, Iss. 15. P. 2394–2397. DOI:10.1103/PhysRevLett.68.2394
2. Brandt E. H. The flux-line lattice in superconductors. *Rep. Prog. Phys.* 1995. Vol. 58, N 11. P. 1465–1594. DOI:10.1088/0034-4885/58/11/003
3. Savel'ev S., Yampol'skii V. A., Rakhmanov A. L., Nori F. Terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum, generation, nonlinear and quantum phenomena. *Rep. Prog. Phys.* 2010. Vol. 73. P. 026501(49 p.). DOI:10.1088/0034-4885/73/2/026501
4. Tonouchi M. Cutting-edge terahertz technology. *Nat. Photonics.* 2007. Vol. 1, Iss. 2. P. 97–105. DOI:10.1038/nphoton.2007.3
5. Capasso F., Gmachl C., Sivco D. L., Cho A. Y. Quantum Cascade Lasers. *Phys. Today.* 2002. Vol. 55, Iss. 5. P. 34–40. DOI:10.1063/1.1485582
6. Koshelets V. P., Shitov S. V. Integrated superconducting receivers. *Supercond. Sci. Technol.* 2000. Vol. 13, Iss. 5. P. R53–R69. DOI:10.1088/0953-2048/13/5/201

7. Kleiner R. Filling the Terahertz Gap. *Science*. 2007. Vol. 318, Iss. 5854. P. 1254–1255. DOI:10.1126/science.1151373
8. Mills D. L. *Nonlinear optics: basic concepts*. Berlin: Springer, 1998. 263 p.
9. Rajaraman, R. *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1987. 418 p.
10. Savel'ev S., Rakhmanov A. L., Yampol'skii V. A., Nori F. Analogs of nonlinear optics using Tera-Hertz Josephson plasma waves in layered superconductors. *Nat. Phys.* 2006. Vol. 2, Iss. 8. P. 521–525. DOI:10.1038/nphys358
11. Yampol'skii V. A., Savel'ev S., Slipchenko T. M., Rakhmanov A. L., Nori F. Nonlinear Josephson plasma waves in slabs of layered superconductors. *Physica C*. 2008. Vol. 468, Iss. 7. P. 499–502. DOI:10.1016/j.physc.2007.11.017
12. Yampol'skii V. A., Slipchenko T. M., Mayzelis Z. A., Kadygrob D. V., Apostolov S. S., Savel'ev S. E., Nori F. Hysteretic jumps in the response of layered superconductors to electromagnetic fields. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78, Iss. 18. P. 184504 (6 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.78.184504
13. Savel'ev S. E., Yampol'skii V. A., Nori F. Layered superconductors as nonlinear waveguides for terahertz waves. *Phys. Rev. B*. 2007. Vol. 75, Iss. 18. P. 184503 (8 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.75.184503
14. Pendry J. B. Negative Refraction Makes a Perfect Lens. *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, Iss. 18. P. 3966–3969. DOI:10.1103/PhysRevLett.85.3966
15. Shelby R. A., Smith D. R., Schultz S. Experimental Verification of a Negative Index of Refraction. *Science*. 2001. Vol. 292. P. 77–79. DOI:10.1126/science.1058847
16. Веселаго В. Г. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления. *Успехи физических наук*. 2003. Т. 173, № 7. С. 790–794.
17. Rakhmanov A. L., Yampol'skii V. A., Fan J. A., Capasso F., Nori F. Layered superconductors as negative-refractive-index metamaterials. *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 81, Iss. 17, P. 075101 (6 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.81.075101
18. Golick V. A., Kadygrob D. V., Yampol'skii V. A., Rakhmanov A. L., Ivanov B. A., Nori F. Surface Josephson Plasma Waves in Layered Superconductors above the Plasma Frequency: Evidence for a Negative Index of Refraction. *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 104, Iss. 18. P. 187003 (4 p.). DOI:10.1103/PhysRevLett.104.187003
19. Apostolov S. S., Maizelis Z. A., Yampol'skii V. A., Havrilenko V. I. Anomalous dispersion of surface and waveguide modes in layered superconductor slabs. *Low Temp. Phys.* 2017. Vol. 43, Iss. 2. P. 296–302. DOI:10.1063/1.4977740
20. Averkov Yu. O., Yakovenko V. M., Yampol'skii V. A., Nori F. Oblique surface Josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 87, Iss. 5. P. 054505 (8 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.87.054505
21. Artemenko S. N., Remizov S. V. Stability, collective modes and radiation from sliding Josephson vortex lattice in layered superconductors. *Physica C*. 2001. Vol. 362, Iss. 1–4. P. 200–204. DOI:10.1016/S0921-4534(01)00670-0
22. Helm Ch., Bulaevskii L. N. Optical properties of layered superconductors near the Josephson plasma resonance. *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 66, Iss. 9. P. 094514 (23 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.66.094514
23. Шмидт В. В. *Введение в физику сверхпроводников*. Изд. 2-е испр. и доп. Москва: МЦНМО, 2000. 402 с.
24. Косевич А. М., Ковалев А. С. *Введение в нелинейную физическую механику*. Киев: Наук. думка, 1989. 304 с.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика*. Т. 1. *Механика*. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2004. 224 с.
2. Brandt, E. H., 1995. The flux-line lattice in superconductors. *Rep. Prog. Phys.*, **58**(11), pp. 1465–1594. DOI:10.1088/0034-4885/58/11/003
3. Savel'ev, S., Yampol'skii, V. A., Rakhmanov, A. L., Nori, F., 2010. Terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum, generation, nonlinear and quantum phenomena. *Rep. Prog. Phys.*, **73**, pp. 026501 (49 p.). DOI:10.1088/0034-4885/73/2/026501
4. Tonouchi, M., 2007. Cutting-edge terahertz technology. *Nat. Photonics*, **1**(2), pp. 97–105. DOI:10.1038/nphoton.2007.3
5. Capasso, F., Gmachl, C., Sivco, D. L., Cho, A. Y., 2002. Quantum Cascade Lasers. *Phys. Today*, **55**(5), pp. 34–40. DOI:10.1063/1.1485582
6. Koshelets, V. P., Shitov, S.V., 2000. Integrated superconducting receivers. *Supercond. Sci. Technol.* **13**(5), pp. R53–R69. DOI:10.1088/0953-2048/13/5/201
7. Kleiner, R., Savel'ev, S., 2007. Filling the Terahertz Gap. *Science*. **318**(5854), pp. 1254–1255. DOI:10.1126/science.1151373
8. Mills, D. L., 1998. *Nonlinear optics: basic concepts*. Berlin: Springer.
9. Rajaraman, R., 1987. *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. Amsterdam: North-Holland.
10. Savel'ev, S., Rakhmanov, A. L., Yampol'skii, V. A., Nori, F., 2006. Analogs of nonlinear optics using Tera-Hertz Josephson plasma waves in layered superconductors. *Nat. Physics*, **2**(8), pp. 521–525. DOI:10.1038/nphys358
11. Yampol'skii, V. A., Savel'ev, S., Slipchenko, T. M., Rakhmanov, A. L., Nori, F., 2008. Nonlinear Josephson plasma waves in slabs of layered superconductors. *Physica C*, **468**(7), pp. 499–502. DOI:10.1016/j.physc.2007.11.017
12. Yampol'skii, V. A., Slipchenko, T. M., Mayzelis, Z. A., Kadygrob, D. V., Apostolov, S. S., Savel'ev, S. E., Nori, F., 2008. Hysteretic jumps in the response of layered superconductors to electromagnetic fields. *Phys. Rev. B*, **78**(18), pp. 184504(1)–184504(6). DOI:10.1103/PhysRevB.78.184504
13. Savel'ev, S. E., Yampol'skii, V. A., Nori, F., 2007. Layered superconductors as nonlinear waveguides for terahertz waves. *Phys. Rev. B*, **75**(18), pp. 184503 (8 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.75.184503
14. Pendry, J. B., 2000. Negative Refraction Makes a Perfect Lens. *Phys. Rev. Lett.*, **85**(18), pp. 3966–3969. DOI:10.1103/PhysRevLett.85.3966
15. Shelby, R. A., Smith, D. R., Schultz, S., 2001. Experimental Verification of a Negative Index of Refraction. *Science*, **292**(5514), pp. 77–79. DOI:10.1126/science.1058847
16. Veselago, V. G., 2003. Electrodynamics of materials with negative refractive index. *Usp. fiz. nauk*, **173**(7), pp. 790–794 (in Russian).
17. Rakhmanov, A. L., Yampol'skii, V. A., Fan, J. A., Capasso, F., Nori, F., 2010. Layered superconductors as negative-refractive-index metamaterials. *Phys. Rev. B*, **81**(17), pp. 075101 (6 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.81.075101
18. Golick, V. A., Kadygrob, D. V., Yampol'skii, V. A., Rakhmanov, A. L., Ivanov, B. A., Nori, F., 2010. Surface Josephson Plasma Waves in Layered Superconductors above the Plasma Frequency: Evidence for a Negative Index of Refraction. *Phys. Rev. Lett.*, **104**(18), pp. 187003 (4 p.). DOI:10.1103/PhysRevLett.104.187003
19. Apostolov, S. S., Maizelis, Z. A., Yampol'skii, V. A., Havrilenko, V. I., 2017. Anomalous dispersion of surface and waveguide modes in layered superconductor slabs. *Low Temp. Phys.*, **43**(2), pp. 296–302. DOI:10.1063/1.4977740
20. Averkov, Yu. O., Yakovenko, V. M., Yampol'skii, V. A., Nori, F., 2013. Oblique surface Josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*, **87**(5), pp. 054505 (8 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.87.054505
21. Artemenko, S. N., Remizov, S. V., 2001. Stability, collective modes and radiation from sliding Josephson vortex lattice in layered superconductors. *Physica C*. **362**(1–4), pp. 200–204. DOI:10.1016/S0921-4534(01)00670-0
22. Helm, Ch., Bulaevskii, L. N., 2002. Optical properties of layered superconductors near the Josephson plasma resonance.

REFERENCES

1. Kleiner, R., Steinmeyer, F., Kunkel, G., Muller, P., 1992. Intrinsic Josephson effects in Bi₂Sr₂CaCu₂O_{8+δ} single crystals. *Phys. Rev. Lett.*, **68**(15), pp. 2394–2397. DOI:10.1103/PhysRevLett.68.2394

- nance. *Phys. Rev. B.* **66**(9), pp. 094514 (23 p.). DOI:10.1103/PhysRevB.66.094514
23. Schmidt, V. V., 2000. *Introduction to physics of superconductors*. 2nd ed. Moscow: MCNMO (in Russian).
24. Kosevich, A. M., Kovalev, A. S., 1989. *Introduction to nonlinear physical mechanics*. Kyev: Nauk. dumka Publ. (in Russian).
25. Landau, L. D., Lifshits, E. M., 2004. *Theoretical physics*. V. 1, Mechanics. 5th ed. Moscow: Fizmatlit Publ. (in Russian).

Рукопись поступила 18.10.2017.

S. S. Apostolov, D. V. Kadygrob, Z. A. Maizelis,
A. A. Nikolaenko, A. A. Shmat'ko, V. A. Yampol'skii

NORMAL AND ANOMALOUS DISPERSION OF WEAKLY NONLINEAR LOCALIZED MODES IN PLATE OF LAYERED SUPERCONDUCTOR

Weakly nonlinear localized electromagnetic modes in a plate of layered superconductor are theoretically studied. It is assumed that the plate is embedded in the uniform dielectric environment, the superconducting layers are perpendicular to the surface of the plate, and the modes propagate across the layers. Due to the strong anisotropy of the Josephson plasma in layered superconductors, localized modes can possess unusual dispersion properties.

The electromagnetic field in a layered superconductor is determined by the distribution of the gauge-invariant phase difference of the order parameter, which satisfies the system of coupled sin-Gordon equations. Based on the solution of these equations, as well as the Maxwell equations in the dielectric environment, dispersion relations can be obtained for localized electromagnetic modes.

It is established that the dispersion of such localized modes turns out to be anomalous in a certain range of parameters. In addition, the points on the dispersion curves are found, at which the group velocity of the modes can vanish. In addition, the nonlinearity leads to the fact that the dispersion relations contain the amplitude of the localized mode.

Due to the fact that in the nonlinear case the dispersion relations contain the amplitude of the localized mode, it is possible to

observe the stop-light phenomenon for the localized modes in the layered superconductor plate.

Key words: layered superconductor, localized modes, anomalous dispersion.

С. С. Апостолов, Д. В. Кадигроб,
О. А. Ніколаєнко, З. О. Майзеліс,
О. О. Шматько, В. О. Ямпольський

НОРМАЛЬНА ТА АНОМАЛЬНА ДИСПЕРСІЯ СЛАБОНЕЛІНІЙНИХ ЛОКАЛІЗОВАНИХ МОД У ПЛАСТИНІ ШАРУВАТОГО НАДПРОВІДНИКА

Теоретично досліджуються слабонелінійні локалізовані електромагнітні моди у пластині шаруватого надпровідника. Передбачається, що пластина знаходиться в однорідному діелектричному оточенні, надпровідні шари перпендикулярні поверхні пластини, а моди поширюються поперек шарів. Завдяки сильній анізотропії джозефсонівської плазми в шаруватих надпровідниках, локалізовані моди можуть володіти незвичайними дисперсійними властивостями.

Електромагнітне поле в шаруватому надпровіднику визначається розподілом калібрувально-інваріантної різниці фаз параметра порядку, яка задовольняє системі зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона. На підставі рішення цих рівнянь, а також рівнянь Максвелла в діелектричному оточенні, можуть бути отримані дисперсійні співвідношення для локалізованих електромагнітних мод.

Встановлено, що у певному діапазоні параметрів дисперсія таких локалізованих мод виявляється аномальною. На дисперсійних кривих виявлено точки, де групова швидкість мод може обернутися в нуль. Крім того, нелінійність призводить до того, що дисперсійні співвідношення містять амплітуду локалізованої моди.

Завдяки тому, що в нелінійному випадку дисперсійні співвідношення містять амплітуду локалізованої моди, відкривається можливість для спостереження явища зупинки світла локалізованих мод у пластині шаруватого надпровідника.

Ключові слова: шаруватий надпровідник, локалізовані моди, аномальна дисперсія.