

А. О. Пузанов

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: s5sk@ire.kharkov.ua

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВУХЧАСТОТНОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ФАКЕЛЬНОГО РАЗРЯДА С УЧЕТОМ И БЕЗ УЧЕТА ЕГО ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Факельный разряд (ФР) находит применение в ряде областей науки и техники. Однако отставание теоретических его исследований от растущих насущных потребностей обуславливает актуальность решения множества связанных с ФР практико-ориентированных задач. В данной работе продолжены исследования предложенного автором оригинального метода измерения активного сопротивления ФР (R_d) с учетом индуктивности ФР (L). На основании выполненных здесь расчетов и произведенной ранее оценки границ применимости модели, в которой искомое сопротивление R_d полагается частотно-независимым, подтверждено, что предлагаемый подход позволяет получать результат с учетом или без учета индуктивности ФР в диапазоне, по крайней мере, $1 \cdot 10^{-3} \leq f \ll 3$ ГГц. Показано, что необходимость принятия в расчет индуктивности для ФР мощностью до 1 кВт и выбор подходящих для измерений пар частот $f_{0,1}$ должны исследоваться в каждом случае отдельно и, при надобности, исходя из возможности возбудить одинаковые ФР на двух достаточно удаленных частотах. Расчеты R_d без учета индуктивности показали, что погрешность вычислений слабо зависит от высоты расположения ФР относительно земли и существенно возрастает при уменьшении диаметра ФР, увеличении длины ФР, малых измеряемых значениях R_d (< 1 кОм), сближении частот $f_{0,1}$. Установлено, что указанные причины в ряде случаев неизбежно приводят к необходимости дополнить классическую схему ФР Неймана эквивалентной индуктивностью, с соответствующим преобразованием расчетных формул. Показано, что резонансная частота f_r разрядной цепи приблизительно пропорциональна частоте f_{\max} , ограничивающей сверху область частот, в которой для описания ФР остается справедливой теория цепей, и $f_{\max} < f_r$. Таким образом, знание f_r и f_{\max} позволяет уточнить возможные значения функции α – отношения напряжений, при которых ФР сохраняет свои электрические и геометрические характеристики. Предложенный метод способствует более производительному использованию промышленных ресурсов. Ил. 1. Табл. 3. Библиогр.: 13 назв.

Ключевые слова: факельный разряд, модель Неймана, индуктивность факельного разряда, активное сопротивление факельного разряда.

Исследования факельного разряда (ФР) и разработка методов измерения его характеристик представляют несомненный интерес для многочисленных практических приложений. Этим вопросам были посвящены наши предыдущие работы [1–6].

В работе [5] предложен метод определения такой важной характеристики ФР, как его активное сопротивление – R_d . Были получены формулы, позволяющие найти величину R_d для ФР мощностью до 1 кВт, возбужденного в открытом воздушном пространстве. Для этого используются результаты измерений на двух частотах напряжений генератора, необходимых для поддержания горения ФР при одинаковых условиях и одинаковых на обеих частотах его электрических и геометрических характеристиках.

В [5] также построены частотные зависимости для указанных напряжений, выведены

оценочные выражения для параметров ФР, найдена полоса частот, в которой рассмотренная «частотно-независимая» (для R_d) модель остается справедливой.

Этот подход был развит в работе [6], в которой схема М. С. Неймана была дополнена эквивалентной индуктивностью разрядного канала и получена более общая формула для R_d ФР.

Для справедливости предложенного метода необходимо, чтобы электрические характеристики плазмы ФР не зависели от частоты [5, 6]. Исходя из известных свойств плазмы реальных ФР [9], в работе [5] показано, что это условие справедливо в достаточно широкой полосе частот, – по крайней мере, $1 \cdot 10^{-3} \leq f \ll 3$ ГГц.

Описанный в [5, 6] метод имеет также очевидное ограничение на возможность корректного представления разрядной цепи со-

вокупностью сосредоточенных элементов только в определенной полосе частот, которая ограничена сверху некоторым значением $f = f_{\max}$. В каждом частном случае, в зависимости от длины ФР, эту частоту можно найти из условия малости изменения фазы электромагнитной волны за время прохождения ею пути от начала ФР до его конца.

Представляет интерес, во-первых, найти значения частоты f_{\max} для ФР разной длины l и сравнить полученные значения с резонансными частотами f_r разрядной цепи. Как будет показано ниже, это позволит установить между f_{\max} и f_r приблизительную пропорциональную связь для достаточно широких пределов изменения диаметра ФР d и длины l . Во-вторых, с практической точки зрения важно знать, в каких случаях при определении R_d индуктивностью разряда можно пренебречь, а в каких – нет. Для этой цели будет использована полученная в работе [6] формула для R_d ФР, которая его индуктивность учитывает.

Таким образом, целью настоящей работы является: 1) нахождение максимально допустимых частот f_{\max} , ограничивающих границы применимости предложенного в работах [5, 6] метода определения R_d ФР различной длины в рамках теории цепей; 2) исследование возможности установить приближенную эмпирическую связь между частотами f_{\max} и резонансными частотами разрядной цепи $f_r = (2\pi\sqrt{LC})^{-1}$ при изменении геометрических параметров ФР; 3) на основании п. 2) дополнительное уточнение оценочного неравенства для функции $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega)$, определяемой как отношение напряжений генератора, при которых ФР сохраняет свои электрические и геометрические параметры, на частотах $\omega (= \omega)$ и $\omega_0 (< \omega_1)$ соответственно;

4) проведение численного исследования с целью установить, для каких длин ФР, диаметров его разрядного канала и выбранных для измерений пар частот $f_{0,1}$ индуктивностью ФР пренебрегать нельзя.

1. Резонансные и максимально допустимые частоты для эквивалентной схемы разрядной цепи из сосредоточенных элементов. Время, за которое электромагнитная волна частоты ω проходит путь от начала ФР до конца, – $\tau = l/v_\phi$, где v_ϕ – фазовая скорость волны вдоль разряда. Полагая, что замедление электромагнитной волны разрядным каналом невелико [3, 4], примем, что v_ϕ равна скорости света в вакууме c .

Условием малости изменения фазы электромагнитной волны за время τ является требование $\omega\tau \ll 2\pi$. Отсюда определим максимально допустимую частоту напряжения возбуждения, при которой фазу волны в начале и конце ФР можно приближенно считать одинаковой, –

$$f_{\max} = 0,1c/l. \tag{1}$$

Значения емкости ФР, возбужденного на конце вертикально расположенного провода длиной h , относительно земли и собственной индуктивности ФР, которые необходимы для нахождения резонансной частоты разрядной цепи

$$f_r(h, l, d) = [2\pi\sqrt{L(l, d)C(h, l, d)}]^{-1},$$

определяются по формулам [10, с. 87; 11]

$$C(h, l, d) \approx 0,2416l / \left[\lg\left(\frac{2l}{d}\right) - k(h, l) \right], \text{ пФ}; \tag{2}$$

$$L(l, d) = 2 \cdot 10^{-3} l \left(\frac{d}{2l} - 1 + 2,3031g \frac{4l}{d} \right), \text{ мкГн}. \tag{3}$$

Здесь l, d (см) – длина и средний диаметр разрядного канала ФР соответственно; $k(h, l)$ – постоянная, определяемая из табл. 1 для заданного отношения h/l [6, 10, 11].

Таблица 1

Значения параметра k в зависимости от длины ФР l и двух значений высоты h расположения его нижней точки относительно поверхности земли

$h, \text{ см}$	$l, \text{ см}$	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30
5	h/l	0,200	0,400	0,600	0,800	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000
	k	0,153	0,170	0,184	0,196	0,207	0,247	0,273	0,291	0,305	0,317
50	h/l	50,000	25,000	16,667	12,500	10,000	5,000	3,333	2,500	2,000	1,667
	k	0,1436	0,1438	0,1439	0,1440	0,1440	0,153	0,162	0,170	0,177	0,184

Диаметр разрядного канала определяют по точке перегиба температурой кривой, построенной в зависимости от радиальной координаты, перпендикулярной оси ФР. Обычно этот диаметр намного меньше диаметра диффузионной оболочки ФР, в зоне которой диссипация электромагнитной энергии не существенна [9, с. 8, 21].

Значения k для $h = 5$ см и $h/l = \{3; 6\}$ в табл. 1 найдены с использованием данных из монографий [10, 11] (см. также работу [6]) путем сплайн-интерполяции между узлами, соответственно

$$\{k(h/l = 2,5) = 0,261; k(h/l = 3,333) = 0,280\},$$

$$\{k(h/l = 5,0) = 0,305; k(h/l = 6,667) = 0,323\},$$

а для $h = 50$ см и $h/l > 10$ – путем линейной интерполяции между узлами

$$\{k(h/l = 10) = 0,144; k(h/l \rightarrow \infty) = 0,133\}.$$

Заметим, что из-за небезупречности используемой модели ФР и для учета влияния однопроводной линии (в частности, ее излу-

чения), а также распространения вдоль ФР поверхностной волны найденные по формулам (2) и (3) значения реактивностей на практике, возможно, придется уточнять [12].

Расчеты значений частоты $f_r(l, d, h)$ в зависимости от d и l были выполнены для двух значений высоты расположения нижней точки ФР относительно земли: $h = 5$ см и $h = 50$ см. Установлено, что f_r очень незначительно зависит от h . Поэтому для краткости ограничимся представлением только случая $h = 50$ см (табл. 2).

В третьем столбце табл. 2 приведены значения зависящей только от l частоты f_{\max} , а в скобках рядом – соответствующая f_{\max} длина волны λ_{\min} .

Как видно из табл. 2, при $l > 15$ см значение f_r весьма незначительно зависит от d .

Можно также заметить, что для разных длин ФР отношение частот f_r/f_{\max} изменяется в существенно меньших пределах, чем f_r и f_{\max} по отдельности, и находится в окрестности некоторого среднего значения.

Таблица 2

Резонансные и максимально допустимые частоты для эквивалентной схемы разрядной цепи на сосредоточенных элементах при различных диаметрах d разрядного канала ФР для $h = 50$ см

Длина ФР l , см	Время прохождения волны вдоль ФР τ , пс	Макс. допустимая частота f_{\max} , ГГц (λ_{\min} , см)	Диаметр разрядного канала d , см											
			0,05		0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
			f_r , ГГц	f_r/f_{\max}	f_r , ГГц	f_r/f_{\max}	f_r , ГГц	f_r/f_{\max}	f_r , ГГц	f_r/f_{\max}	f_r , ГГц	f_r/f_{\max}	f_r , ГГц	f_r/f_{\max}
1	33	3,00 (10)	9,08	3,03	9,65	3,22	10,58	3,53	11,39	3,80	12,07	4,02	12,53	4,18
2	67	1,50 (20)	4,35	2,90	4,54	3,03	4,82	3,22	5,07	3,38	5,29	3,53	5,50	3,67
3	100	1,00 (30)	2,85	2,85	2,95	2,95	3,09	3,09	3,22	3,22	3,33	3,33	3,43	3,43
4	133	0,75 (40)	2,11	2,82	2,18	2,90	2,27	3,03	2,34	3,13	2,41	3,22	2,47	3,30
5	167	0,60 (50)	1,68	2,80	1,72	2,87	1,79	2,98	1,84	3,07	1,89	3,14	1,93	3,22
10	333	0,30 (100)	0,82	2,74	0,84	2,79	0,86	2,87	0,88	2,92	0,89	2,97	0,91	3,02
15	500	0,20 (150)	0,54	2,71	0,55	2,75	0,56	2,81	0,57	2,86	0,58	2,90	0,59	2,93
20	667	0,15 (200)	0,40	2,69	0,41	2,73	0,42	2,78	0,42	2,82	0,43	2,85	0,43	2,88
25	833	0,12 (250)	0,32	2,67	0,33	2,71	0,33	2,76	0,34	2,79	0,34	2,82	0,34	2,85
30	1000	0,10 (300)	0,27	2,66	0,27	2,70	0,27	2,74	0,28	2,77	0,28	2,80	0,28	2,82
Средние геометрические для отношений f_r/f_{\max}			2,7832		2,8591		2,9701		3,0596		3,1368		3,2031	

Для подобных зависимостей – изменяющихся по экспоненциальному закону или требующих сглаживания – целесообразно вычислять среднее геометрическое [13], определяемое как

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Полученные для различных d средние значения отношения f_r/f_{\max} содержит последняя строка табл. 2. Усредняя их тем же способом, можно установить следующее значение:

$$\overline{f_r/f_{\max}} = 2,9983. \quad (4)$$

Сопоставив (4) с условием (1), получаем простое эмпирическое выражение для приближенной оценки резонансной частоты разрядной цепи

$$f_r \approx 0,29983c/l \approx 9/l, \text{ ГГц} \quad (5)$$

(скорость света c здесь выражается в сантиметрах в секунду, а длина ФР l – в сантиметрах), а значит,

$$f_{\max} \approx \frac{1}{3} f_r. \quad (6)$$

Для меньших и заведомо известных пределов изменения параметров l и d оценки (5) и (6) есть смысл уточнить.

На рис. 1 изображена аппроксимированная зависимость для среднегеометрических значений f_r/f_{\max} (усреднение по l) в зависимости от диаметра d разрядного канала ФР. График построен на основании табл. 2; соответствующие узловые точки на рис. 1 обозначены маркерами.

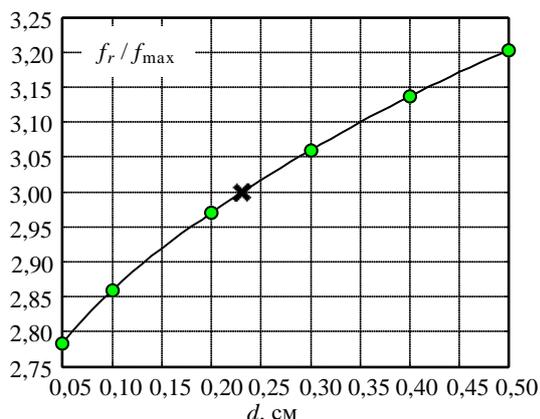


Рис. 1. Аппроксимированная зависимость для среднегеометрических значений f_r/f_{\max} , найденных в результате расчетов для разных l , от диаметра d разрядного канала для $h = 50$ см. Крестиком указано среднее значение $f_r/f_{\max} = 3$

2. Погрешность вычисления активного сопротивления ФР без учета его эквивалентной индуктивности. Пределы применимости «безындукционной» модели. В работах [5, 6] получены формулы для нахождения активного сопротивления ФР как без учета индуктивности – $R_d^{(L=0)}$, так и с ее учетом – $R_d^{(L \neq 0)}$. Основываясь на результатах этих работ, сравним значения $R_d^{(L=0)}$ и $R_d^{(L \neq 0)}$, которые можно найти для одного и того же ФР, в предположении, что значение $R_d^{(L \neq 0)}$ является точным. При этом исходим из следующего.

В формулы для $R_d^{(L=0)}$ и $R_d^{(L \neq 0)}$ входит функция $\alpha(\omega_0, \omega_1)$, описывающая отношение модулей импедансов разрядной цепи (или напряжений генератора) на частотах ω_0 и ω_1 при условии сохранения разрядом своих электрических и геометрических свойств [5, 6]. Учет индуктивности ФР при нахождении значений $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1)$ [6] даст результат более близкий к предполагаемому экспериментальному. Это позволит оценить погрешность вычисления $R_d^{(L=0)}$, поскольку измеренное значение $\alpha = \alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1)$, очевидно, зависит от истинного значения величины $R_d^{(L \neq 0)}$.

Зависимость $R_d^{(L \neq 0)}$, как функция измеренного значения $\alpha = \alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1)$, имеет вид

$$R_d^{(L \neq 0)} = x_C(\omega_0) \times \sqrt{\frac{\alpha^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2}\right)^2 - \xi^2 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_r^2}\right)^2}{1 - \alpha^2}}. \quad (7)$$

Если измерений $R_d^{(L \neq 0)}$ не проводить, значение $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1)$ можно вычислить (см. формулы (13) или (14) в работе [6]), задав $R_d^{(L \neq 0)}$ предварительно:

$$\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1) = \sqrt{\frac{1 + \left[\frac{x_C(\omega_0)}{R_d^{(L \neq 0)}} \xi \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_r^2} \right) \right]^2}{1 + \left[\frac{x_C(\omega_0)}{R_d^{(L \neq 0)}} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \right) \right]^2}}, \quad (8)$$

где $x_C(\omega_0) = 1/(\omega_0 C)$ – реактивное сопротивление емкостной связи ФР с землей на частоте ω_0 ; $\omega_r = (LC)^{-1/2}$ – резонансная частота разрядной цепи; $\xi = \omega_0 / \omega_1$.

Таким образом, полагая вычисленную по формуле (8) величину $\alpha(\omega_0, \omega_1) = \alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1)$ точной, т. е. равной измеренной, определим относительную погрешность

$$\Psi = \frac{|R_d^{(L=0)} - R_d^{(L \neq 0)}|}{R_d^{(L \neq 0)}} 100 \%, \quad (9)$$

где $R_d^{(L \neq 0)}$ задано, а $R_d^{(L=0)}$ определено по формуле, являющейся частным случаем выражения (7) при $\omega_0 < \omega_1 \ll \omega_r$ [5, 6],

$$R_d^{(L=0)} = x_C(\omega_0) \sqrt{\frac{\alpha^2(\omega_0, \omega_1) - \xi^2}{1 - \alpha^2(\omega_0, \omega_1)}}. \quad (10)$$

Вычисления показали, что Ψ слабо зависит от высоты расположения ФР относительно земли и может существенно возрастать при:

- а) уменьшении диаметра ФР – d ;
- б) увеличении длины ФР – l ;
- в) заведомо малых измеряемых значениях активного сопротивления ФР – R_d (< 1 кОм);
- г) сближении частот $f_{0,1}$.

Последнее обстоятельство особенно важно иметь в виду, если перестройка генератора по частоте в широких пределах затруднена (обычно в области высоких частот).

Отрицательное влияние на точность измерений, которое оказывает сближение частот f_0 и f_1 , отмечалось также в выводах к работе [6], однако по причинам, не связанным с возрастанием погрешности вычислений R_d с использованием «безындукционной» модели. В [6] указывалось только на необходимость

достаточного разнеса частот f_0 и f_1 , чтобы ослабить требование к точности измерений.

Так, было указано на то, что измеряемое значение α должно согласовываться с достижимой точностью измерительного оборудования, а также приборов, контролирующих неизменность геометрических характеристик ФР при его возбуждении на двух частотах. Отсюда сделан вывод, что измеряемое значение α должно быть как можно меньшим, т. е. измеренные напряжения $U_G(\omega_0)$ и $U_G(\omega_1) = \alpha(\omega_0, \omega = \omega_1)U_G(\omega_0)$ должны отличаться как можно больше. Это, в свою очередь, возможно, если только частоты f_0 и f_1 достаточно далеко отстоят одна от другой.

Чтобы проиллюстрировать утверждения а)–г), в качестве примера зададим достаточно малыми диаметр разрядного канала ($d = 0,05$ см) и сопротивление ФР ($R_d = 300$ Ом). Положим также, что $h = 50$ см и $l = 10$ см ($h/l = 5$, $k = 0,153$).

Предположим, что для нахождения R_d с использованием «безындукционной» модели произведены измерения значения $\alpha(\omega_0, \omega_1)$ на двух парах частот: $f_{0,1} = \{50, 300\}$ МГц и $f_{0,1} = \{50, 55\}$ МГц. (В обоих случаях $f_{0,1} \leq f_{\max} = 300$ МГц.) В действительности, как следует из сказанного выше – не проводя измерений, найдем $\alpha(\omega_0, \omega_1)$ по формуле (8).

Вычисления показывают, что для первой пары частот значение Ψ достигает 55,2 %, а для второй – 61,9 %.

Отсюда следует, что при пересчете измеренных $\alpha(\omega_0, \omega_1)$ и геометрических параметров ФР в его активное сопротивление изначально следует использовать формулу (7), в которой индуктивность учтена. Применение же «безындукционной» модели (формула (10)) возможно только при появлении на то оснований, с учетом означенных выше факторов а)–г).

Далее рассмотрим ряд примеров, в которых границы применимости «безындукционной» модели весьма близко совпадают с границами применимости собственно теории цепей, в пределах которых с помощью указанной модели возможно получение вполне приемлемых результатов.

По сравнению с предыдущим примером диаметр разрядного канала d увеличим в че-

тыре раза, приняв его равным 0,2 см. Точное значение R_d положим равным 1 кОм.

Полученные согласно (9) значения Ψ для заданных в расчетах параметров приведены в табл. 3. Минимальные длины волн, соответст-

вующие большей из пары выбранных частот $f_{0,1}$, в табл. 3 обозначены как $\inf \lambda$. В расчетах заданы $R_d = 1$ кОм, диаметр разрядного канала $d = 0,2$ см и высота расположения ФР $h = 50$ см.

Таблица 3

Относительные погрешности вычисления R_d на основании «безындукционной» модели для различных пар частот $f_{0,1}$ и длин ФР l

l , см	$f_{0,1}$, МГц											
	{50, 75}		{100, 150}		{200, 250}		{450, 500}		{595, 600}		{950, 1000}	
	$\frac{l}{\inf \lambda}$	Ψ , %										
1	0,003	0,285	0,005	0,285	0,008	0,285	0,017	0,284	0,020	0,283	0,033	0,279
2	0,005	0,627	0,010	0,626	0,017	0,625	0,033	0,616	0,040	0,605	0,067	0,518
3	0,008	0,899	0,015	0,898	0,025	0,894	0,050	0,851	0,060	0,797	0,100	0,317
4	0,010	1,126	0,020	1,123	0,033	1,111	0,067	0,982	0,079	0,809	0,133	0,815
5	0,013	1,320	0,025	1,314	0,042	1,288	0,083	0,982	0,099	0,551	0,167	3,761
10	0,025	2,013	0,050	1,960	0,083	1,658	0,167	3,521	0,198	13,044	0,333	–
15	0,038	2,466	0,075	2,265	0,125	0,848	0,250	41,295	0,298	–	0,500	–
20	0,050	2,786	0,100	2,239	0,167	2,307	0,333	–	0,397	–	0,667	–
25	0,063	3,005	0,125	1,774	0,208	10,546	0,417	–	0,496	–	0,833	–
30	0,075	3,130	0,150	0,677	0,250	32,756	0,500	–	0,595	–	1,000	–

Результаты вычислений Ψ , удовлетворяющие требованию $\omega\tau \ll 2\pi$ (или, что то же самое, $l/\inf \lambda \leq 0,1$), в табл. 3 выделены жирным шрифтом и отделены снизу жирной границей. Прочие числа приведены не более чем для полноты картины и служат лишь иллюстрациями к возможным ситуациям, с которыми можно столкнуться в ходе аналогичных вычислений.

Из табл. 3 следует, что при диаметре разрядного канала $d = 0,2$ см и достаточно высоком активном сопротивлении ФР в 1 кОм использование для нахождения R_d формулы, не учитывающей индуктивность, для частот, например, около 250 МГц возможно при длинах разряда l , не превышающих 10 см ($l/\inf \lambda \leq 0,083$; $f_r = 0,86$ ГГц – табл. 2); при этом относительная погрешность вычисления $R_d - \Psi \approx 1,7$ %.

При длинах разряда l до 5 см включительно ($f_r = 1,79...10,58$ ГГц – табл. 2) «безындукционная» модель справедлива до частоты 600 МГц; при этом $\Psi < 1$ % (табл. 3).

В «промежуточной» области в табл. 3 – при диаметре разрядного канала $d = 0,2$ см и

$0,1 < l/\inf \lambda \leq 0,167$ – погрешность Ψ в рамках «безындукционной» модели не превосходит 3,8 % в диапазоне частот 100...1 000 МГц. Исключение составляет лишь первый случай ($f = 50...75$ МГц), в котором с ростом l погрешность Ψ достигает 3,1 % уже при $l = 30$ см, несмотря на выполнение условия $l/\inf \lambda = 0,075 < 0,1$.

При $l/\inf \lambda > 0,1$, до некоторых значений l , полученные формулы позволяют получить действительный, хотя и не физический результат, как не удовлетворяющий условию применимости теории цепей. При еще больших l , и как только частота f_1 превысит f_r (т. е. $f_1 > 3f_{\max}$ – сопоставим табл. 2 и 3), вычисления Ψ дают мнимое число.

Так, например, при $f_{0,1} = \{450, 500\}$ МГц и длинах ФР $l \geq 20$ см ($l/\inf \lambda \geq 0,333$ – прочерки в табл. 3) значение $R_d^{(L=0)}$ становится мнимой величиной. Это связано с тем, что аргумент приближенной функции (10) $R_d^{(L=0)}(\alpha)$ выходит за пределы ее области определения: $\omega_0/\omega_1 < \alpha < 1$.

В частности, при $f_{0,1} = \{450, 500\}$ МГц, $l = 20$ см, $d = 0,2$ см, $h = 50$ см, $f_r = 0,417$ ГГц, согласно неравенству (8) из работы [6]

$$\frac{R_d^{(L \neq 0)}(\omega_1)}{R_d^{(L \neq 0)}(\omega_0)} < \alpha < \xi \left| 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_r^2} \right| \left/ \left| 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \right| \right. \quad (11)$$

и в предположении

$$R_d^{(L \neq 0)}(\omega_0) = R_d^{(L \neq 0)}(\omega_1) \equiv R_d^{(L \neq 0)}(\alpha),$$

имеем

$$1 < \alpha = 1,007 < 1,077.$$

Это соответствует случаю «Б», отвергнутому ранее в работе [6]: в отличие от неопределенной в этом интервале функции $R_d^{(L=0)}(\alpha)$, результат вычисления $R_d^{(L \neq 0)}(\alpha)$ дает хотя и действительное, но также не имеющее физического смысла значение. Ибо в данном случае $l / \inf \lambda = 0,333 > 0,1$, что свидетельствует о выходе за установленные выше пределы применимости теории цепей (см. табл. 3).

3. Оценочное неравенство для функции $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega)$ в пределах частот $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$. Искомое неравенство при заданной частоте ω_0 запишем подобно неравенству (9) из работы [6]:

$$\alpha_{\min}^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_{\max}) < \alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega) < 1. \quad (12)$$

Для точности изложения заметим, что при переходе от неравенства (9) из работы [6] к искомому неравенству (12) (с пока неизвестной левой частью) мы исходим из того, что

$$\xi \left| 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_r^2} \right| \left/ \left| 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \right| \right. <$$

$$< \alpha_{\min}^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_{\max}) < \alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega) < 1.$$

Первая строка этой цепочки неравенств ограничивает найденную область определения для $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega)$ (см. выражение (9) из работы [6]).

На основании (12) можно установить нижнюю границу значений частотной зависимости $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega)$. В используемых ниже формулах частота $\omega = \text{const}$ и принято $\omega = \omega_1$. Частота ω_1 может принимать любые допус-

тимые для теории цепей значения $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$.

Найдем левую часть неравенства (12), т. е. выражение для $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_{\max})$. С этой целью используем найденную выше приближительную прямо пропорциональную связь (6) между частотами ω_r и ω_{\max} , т. е. $\omega_{\max} \approx \omega_r / 3$.

В числителе формулы (8) примем $\omega_1 = \omega_{\max}$ или, что то же самое, $\omega_1 \approx \omega_r / 3$.

При этом ξ обозначим как $\xi_{\min} = \omega_0 / \omega_{\max}$.

В знаменателе формулы (8) сделаем подстановки: $\omega_r \approx 3\omega_{\max}$; $\omega_0 / \omega_{\max} = \xi_{\min}$. Тогда

$$\alpha_{\min}^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_{\max}) \approx \sqrt{\frac{1 + 0,79012 \left(\frac{x_C(\omega_0)}{R_d} \xi_{\min} \right)^2}{1 + \left[\frac{x_C(\omega_0)}{R_d} \left(1 - \frac{\xi_{\min}^2}{9} \right) \right]^2}}. \quad (13)$$

Таким образом, при $\omega = \omega_1$ неравенство (12) совместно с выражением (13) определяют, в каких пределах может изменяться значение безразмерной функции $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega)$ с учетом индуктивности разрядного канала и границ применимости теории цепей для описания ФР.

Еще раз отметим, что использованные при получении формулы (13) оценки (5) и (6) будут несколько отличаться для меньших и заведомо известных пределов изменения параметров l и d .

Итак, важность приведенных выкладок обусловлена тем, что измеряемое значение $\alpha^{(L \neq 0)}$ должно соответствовать точности вольтметра, который позволяет достоверно измерить значения напряжений возбуждающего генератора U_G на частотах $\omega_0 < \omega_1$ и $\omega_1 \leq \omega_{\max}$: $U_G(\omega_0)$ и $U_G(\omega_1) = \alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega = \omega_1) U_G(\omega_0)$.

Подводя итог, обобщим результаты наших трех работ, относящиеся к различным оценочным выражениям для значений $\alpha(\omega_0, \omega_1)$.

В работе [5], в рамках «безындукционной» модели, первой была найдена наиболее грубая оценка для α вида $\xi \leq \alpha \leq 1$, где $\xi = \omega_0 / \omega_1$ (см. неравенства (7) в работе [5] или (10) – в [6]). Затем, в той же работе [5], установлено, что значения функции $\alpha(\omega_0, \omega)$ лежат выше асимптоты $\alpha(\omega_0, \omega \rightarrow \infty)$ (формулы (10), (18) в [5] или (15) в [6]) и тем более превосходят значение ξ .

В следующей работе [6], в которой разрядная цепь была дополнена эквивалентной индуктивностью разрядного канала, установлено, что функция $\alpha(\omega_0, \omega)$ имеет минимум на резонансной частоте ω_r . При этом значение $\alpha(\omega_0, \omega_r)$ всегда расположено по оси ординат выше асимптоты $\alpha(\omega_0, \omega \rightarrow \infty)$, найденной без учета индуктивности ФР. Таким образом появилось третье оценочное выражение для $\alpha(\omega_0, \omega)$ – см. неравенство (18) в работе [6].

Четвертое и наиболее точное выражение (12), (13) для оценки значений $\alpha(\omega_0, \omega)$ найдено в данной статье. Получить его оказалось возможным после того, как выяснилось, что максимально допустимая частота, при которой использование теории цепей для анализа остается допустимым, составляет $\omega_{\max} \approx \frac{1}{3} \omega_r$.

На практике выбор того или иного из перечисленных выше оценочных выражений зависит от условий и особенностей эксперимента, а также степени достоверности (или доступности) априорных сведений об электрических и геометрических характеристиках разрядной цепи.

Выводы. 1) На основании вычислений и произведенной в работе [5] оценки границ применимости модели, в которой искомое активное сопротивление ФР – R_d рассматривается как частотно-независимое, подтверждено, что предлагаемый подход позволяет измерять активное сопротивление ФР как с учетом, так и без учета индуктивности разрядного канала в диапазоне частот, по крайней мере, $1 \cdot 10^{-3} < f \ll 3$ ГГц. При этом более

существенное ограничение на максимально допустимую частоту накладывают границы применимости собственно эквивалентной схемы ФР из сосредоточенных элементов. То есть для заданных длины разряда и рабочих частот $f_{0,1}$ должно соблюдаться классическое условие справедливости теории цепей $f_{0,1} < f_{\max}$, означающее, что изменением фазы электромагнитной волны за время ее прохождения вдоль разрядного канала можно пренебречь.

2) Получено эмпирическое выражение для приближенной оценки резонансной частоты разрядной цепи $f_r \approx 9/l$, ГГц (l – в сантиметрах), справедливое в достаточно широком диапазоне изменения геометрических параметров ФР. Числитель этого выражения может быть уточнен для более узких пределов изменения этих параметров. Также установлено, что $f_{\max} \approx \frac{1}{3} f_r$. Последнее обстоятельство дает основания утверждать, что f_r всегда располагается выше полосы частот, в пределах которых допустимо применение теории цепей. При этом f_r , являясь только «геометрическим параметром» разрядной цепи, позволяет оценить верхнюю границу указанной области частот $f_{\max} < f_r$.

3) Получено неравенство, позволяющее оценить границы, в которых может изменяться значение безразмерной функции $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1)$, как отношения напряжений возбуждающего ФР генератора на частотах $\omega_0 \leq \omega_1 \leq \omega_{\max}$: $U_G(\omega_0)$ и $U_G(\omega_1) = \alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega = \omega_1) U_G(\omega_0)$, с учетом индуктивности разрядного канала. При измерениях значение $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1)$ должно соответствовать достижимой точности измерительного вольтметра, а также оборудования для контроля неизменности геометрических характеристик ФР при его возбуждении на двух частотах. Желательно, чтобы значение $\alpha^{(L \neq 0)}(\omega_0, \omega_1)$ было по возможности меньшим, а значит, как можно меньшим – и отношение рабочих частот ω_0 / ω_1 .

4) Установлено, что при длинах ФР $l > 15$ см резонансная частота разрядной цепи незна-

чительно зависит от диаметра d разрядного канала.

5) Сравнение значений R_d , полученных без учета и с учетом индуктивности разрядного канала (в последнем случае расчеты полагаем точными), показало, что относительная погрешность вычислений Ψ для «безындукционной» модели слабо зависит от высоты h расположения ФР относительно земли. Это позволяет ослабить требование к постоянству h за время измерений и не принимать во внимание некоторое изменение h по причине сгорания проводника однопроводной линии.

6) В то же время, погрешность вычислений без учета индуктивности возрастает при:

- уменьшении диаметра ФР – d ;
- увеличении длины ФР – l ;
- заведомо малых измеряемых значениях активного сопротивления ФР – R_d (< 1 кОм);
- близости частот $f_{0,1}$.

Подчеркнем, что в данном случае последнее утверждение касается исключительно точности вычислений в рамках «безындукционной» модели, но не измерений (п. 3). И в то же время, выбор частот $f_{0,1}$, отстоящими, сколь это возможно, дальше одна от другой, независимо согласуется с возможностью ослабить требование к точности измерительного вольтметра.

Оба последних обстоятельства следует принимать во внимание в области сравнительно высоких частот, в которой широкополосная перестройка генератора по частоте затруднена, и поэтому возможности измерительной установки с одним генератором ограничены.

7) Показано, что, в зависимости от степени влияния перечисленных в п. 6 четырех факторов, необходимость учета индуктивности должна исследоваться в каждом случае отдельно. Ибо в ряде возможных ситуаций определить активное сопротивление разряда R_d с достаточно малой относительной погрешностью возможно даже с использованием «безындукционной» модели.

Актуальность предложенного метода обусловлена возможностью применения ФР для решения множества прикладных задач и значительным отставанием практико-ориентированных теоретических его исследований, в

частности, направленных на развитие методов измерения электрических характеристик ФР.

Библиографический список

1. Efimov B. P., Kuleshov A. N., Khorunzhii M. O., Mos'pan L. P. The Properties of Microwave Discharge in the Goubau Line. *High Temp.* 2008. Vol. 46, Iss. 6. P. 874–880.
2. Ефимов Б. П., Кулешов А. Н., Хорунжий М. О., Пузанов А. О. Возбуждение факельного СВЧ разряда в однопроводной линии. *Радиофизика и электроника*: сб. науч. тр. Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. Харьков, 2009. Т. 14, № 3. С. 267–274.
3. Puzanov A. O., Khorunzhiy M. O., Kuleshov A. N. and Yefimov B. P. Research Results and Applications of Torch Discharge in the Goubau Line. *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2011. Vol. 39, N 11, part 1. P. 2878–2879. DOI:10.1109/TPS.2011.2166407
4. Ефимов Б. П., Кулешов А. Н., Пузанов А. О., Хорунжий М. О. Факельный СВЧ-разряд в однопроводной линии: экспериментальная установка и результаты исследований. *Радиотехника: науч.-техн. сб. Нац. ун-т радиоэлектрон. Харьков, Украина, 2013. № 172. С. 125–133.*
5. Пузанов А. О., Ефимов Б. П., Кулешов А. Н. Активное сопротивление факельного разряда и частотная зависимость минимального для его поддержания напряжения генератора, найденные по результатам измерений на двух частотах. *Радиофизика и электроника.* 2014. Т. 5(19), № 3. С. 61–70.
6. Пузанов А. О. Двухчастотный метод определения активного сопротивления факельного разряда в рамках эквивалентной схемы М. С. Неймана, дополненной эквивалентной индуктивностью разряда. *Радиофизика и электроника.* 2018. Т. 23, № 1. С. 61–70.
7. Нейман М. С. О факельном разряде. *Изв. электропромышленности слабого тока.* 1935. № 7. С. 38–48.
8. Капцов Н. А. *Электроника.* Москва: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1956. С. 383–384.
9. Луценко Ю. Ю. *Физика высокочастотных разрядов емкостного типа.* Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2011. 122 с.
10. *Справочник по радиотехнике.* Под ред. Б. А. Смирнина. Москва–Ленинград: Гос. энергетич. изд-во, 1950. С. 87.
11. Terman F. E. *Radio engineers' Handbook.* New York: McGraw-Hill Company, Inc., 1943. 1021 p.
12. Власов В. А., Луценко Ю. Ю., Тихомиров И. А. Определение электрических характеристик высокочастотного факельного разряда. *Теплофизика и аэромеханика.* 2008. Т. 15, № 1. С. 131–137.
13. Мейзда Ф. Электронные измерительные приборы и методы измерений. Пер. с англ. Москва: Мир, 1990. 535 с.

REFERENCES

1. Efimov, B. P., Kuleshov, A. N., Khorunzhii, M. O. and Mos'pan, L. P., 2008. The Properties of Microwave Discharge in the Goubau Line. *High Temp.*, **46**(6), pp. 874–880.

2. Yefimov, B. P., Kuleshov, A. N., Khorunzhiy, M. O. and Puzanov, A. O., 2009. Excitation of MW torch discharge at the edge of single-conductor line. In: V. M. Yakovenko, ed. 2009. *Radiofizika i elektronika*. Kharkov: IRE NAS of Ukraine Publ. **14**(3), pp. 267–274 (in Russian).
3. Puzanov, A. O., Khorunzhiy, M. O., Kuleshov, A. N. and Yefimov, B. P., 2011. Research Results and Applications of Torch Discharge in the Goubau Line. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **39**(11), part 1., pp. 2878–2879. DOI: 10.1109/TPS.2011.2166407
4. Yefimov, B. P., Kuleshov, A. N., Puzanov, A. O. and Khorunzhiy, M. O., 2013. Torch microwave discharge in a single-conductor line: experimental setup and research results. In: N. I. Slipchenko, ed. 2013. *Radiotekhnika*. Kharkov: National Univ. Radioelectronics Publ. 172, pp. 125–133 (in Russian).
5. Puzanov, A. O., Yefimov, B. P., and Kuleshov, A. N., 2014. Resistance of torch discharge and frequency dependence of HF generator minimal voltages required to sustaining torch discharge combustion. *Radiofizika i elektronika*, **5**(19)(3), pp. 61–70 (in Russian).
6. Puzanov, A. O., 2018. Two-frequency approach for determination of a resistance of a torch discharge within the frames of M. S. Neiman equivalent scheme with added equivalent inductance of the discharge. *Radiofiz. Elektron.*, **23**(1), pp. 61–70 (in Russian).
7. Neiman, M. S., 1935. On the torch discharge. *Izvestiya elektropromyshlennosti slabogo toka*, 7, pp. 38–48 (in Russian).
8. Kaptsov, N. A., 1956. *Electronics*. Moscow: Gos. izd-vo tekhniko-teoretich. lit-ry Publ. (in Russian).
9. Lutsenko, Yu. Yu., 2011. *Physics of high-frequency capacitive discharges*. Tomsk: Tomskiy Politekh. Univer. Publ. (in Russian).
10. Smirenin, B. A. ed., 1950. *Reference book on radio engineering*. Moscow-Leningrad: Energetich. State Publ. P. 87 (in Russian).
11. Terman, F. E., 1943. *Radio engineers' Handbook*. New York: McGraw-Hill Company, Inc. Publ.
12. Vlasov, V. A., Lutsenko, Yu. Yu., Tikhomirov I. A., 2008. Definition of an electrical properties of the HF torch discharge. *Teplofizika i aeromekhanika*, **15**(1), pp. 131–137 (in Russian).
13. Mazda, F. F., 1990. *Electronic Instruments and Measurement Techniques*. Translated from English by V. D. Novikov. Moscow: Mir Publ. (in Russian).

Рукопись поступила 27.12.2017.

A. O. Puzanov

NUMERICAL ANALYSIS
OF THE TWO-FREQUENCY TECHNIQUE
FOR MEASURING THE TORCH DISCHARGE
RESISTANCE WITH OR WITHOUT TAKING
INTO ACCOUNT ITS EQUIVALENT
INDUCTANCE

The torch discharge (TD) is applied in a number of areas of science and technology. However, the lag in theoretical research from ever-growing urgent needs makes the solution of many practical-oriented problems related to the

TD relevant. In the present paper, the study of the proposed by the author original method for measuring the resistance of the TD (R_d) taking into account the TD inductance L is continued. The presented numerical calculations are supplemented by the previously performed estimations of the theory application area. The sought resistance R_d is considered as frequency independent within the theory. Performed estimations and calculations confirm the applicability of the approach presented both with and without taking into account the TD inductance in the frequency range from $1 \cdot 10^{-3}$ to 3.0 GHz. It is shown that a necessity to account the inductance of the torch discharge of the power below 1 kW and the choice of appropriate frequency pairs $f_{0,1}$ have to be studied in each case separately. A possibility to excite the torch discharge at two sufficiently different frequencies is mandatory. Numerical calculations of R_d without taking the inductance into account show that calculations accuracy depend weakly on the height of the torch discharge location relative to the ground. The accuracy increases if the discharge diameter decreases; the discharge length increases; the value of R_d is small and less than 1 kOhm; $f_{0,1}$ frequencies converge. It results in a necessity to add an equivalent inductance into the Neiman's scheme making appropriate modifications of the calculation formulae. It is shown that the resonant frequency f_r is approximately proportional to f_{\max} , which is the upper limit of the frequency range where the circuit theory remains applicable for the discharge modeling. Thus, the knowledge of f_r and f_{\max} allows one to refine the values of the function α , which is the ratio of voltages at which the electrical and geometrical characteristics of the torch discharge remain unchanged. The approach proposed results in more effective using of industrial resources.

Key words: torch discharge, Neiman's model, torch discharge inductance, torch discharge resistance.

O. O. Пузанов

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ДВОЧАСТОТНОГО
МЕТОДУ ВИМІРЮВАННЯ АКТИВНОГО
ОПОРУ ФАКЕЛЬНОГО РОЗРЯДУ
З УРАХУВАННЯМ ТА БЕЗ УРАХУВАННЯ
ЙОГО ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ІНДУКТИВНОСТІ

Факельний розряд (ФР) знаходить застосування в низці галузей науки і техніки. Однак відставання теоретичних його досліджень від нагальних потреб, які постійно зростають, обумовлює актуальність розв'язання безлічі пов'язаних з ФР практико-орієнтованих задач. У цій роботі продовжено дослідження запропонованого автором оригінального методу вимірювання активного опору ФР (R_d) з урахуванням індуктивності ФР (L). На підставі виконаних тут розрахунків і проведеної раніше оцінки меж уживаності моделі, в якій опір R_d , що шукається, вважається частотно-незалежним, підтверджено, що запропонований підхід дозволяє діставати результат з урахуванням або без урахування індуктивності ФР у діапазоні, принаймні, $1 \cdot 10^{-3} \leq f < 3$ ГГц. Показано, що необхідність прийняття до розрахунку індуктивності для ФР потужністю до 1 кВт і вибір потрібних для вимірювань пар частот $f_{0,1}$ мають досліджуватись у кожному випадку окремо і, за необхідністю, виходячи з

можливості збудити однакові ФР на двох достатньо віддалених частотах. Розрахунки R_d без урахування індуктивності показали, що похибка обчислень слабо залежить від висоти розташування ФР відносно землі й істотно зростає при зменшенні діаметра ФР, збільшенні довжини ФР, малих значеннях R_d (< 1 кОм), що вимірюються, зближенні частот $f_{0,1}$. Встановлено, що вказані причини в ряді випадків неминуче призводять до необхідності доповнити схему ФР Неймана еквівалентною індуктивністю, з відповідним перетворенням розрахункових формул. Показано, що резонансна частота f_r

розрядного кола приблизно пропорційна частоті f_{\max} , що обмежує зверху смугу частот, в якій для описання ФР лишається справедливою теорія кіл, і $f_{\max} < f_r$. Таким чином, знання f_r та f_{\max} дозволяє уточнити можливі значення функції α – відношення напруг, при яких ФР зберігає свої електричні і геометричні характеристики. Запропонований метод сприяє більш продуктивному використанню промислових ресурсів.

Ключові слова: факельний розряд, модель Неймана, індуктивність факельного розряду, активний опір факельного розряду.