

ISSN 1028-821X. Radiofiz. Electron. 2019. Vol. 24, No. 2: 57–67

DOI: <https://doi.org/10.15407/fej2019.02.057>

УДК 621.37:537.874.6

PACS: 07.57.–с, 41.20.Jb, 42.25.Fx

**Е.А. Величко, А.П. Николаенко**

Институт радиопизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины  
12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина  
E-mail: sasha@ire.kharkov.ua

## Рассеяние плоской электромагнитной волны кусочно-однородной линзой Люнеберга

**Предмет и цель работы.** В статье рассмотрены эффекты, возникающие при рассеянии плоской электромагнитной волны на кусочно-однородной цилиндрической линзе Люнеберга и диэлектрическом цилиндре с графеновым покрытием. Целью работы является оценка размеров фокального пятна и диапазона частот, в котором наблюдается фокусировка при возникающем плазмонном резонансе.

**Методы и методология.** Проводилось численное моделирование дифракции плоской TE-волны на цилиндрической кусочно-однородной линзе Люнеберга из шести слоев, а также на однородном диэлектрическом цилиндре, покрытом слоем графена. Использовано точное классическое решение граничной задачи. Особенностью рассмотрения является использование функций Бесселя комплексного аргумента. Для случая графенового покрытия применялись резистивные граничные условия, когда проводимость графена определяется по формуле Кубо.

**Результаты работы.** Проведен анализ пространственного распределения амплитуды поля при различных соотношениях внешнего радиуса линзы и длины волны падающего излучения. Показано, что если радиус линзы меньше длины волны, фокусировка у задней стенки цилиндра невозможна. Одним из способов обеспечения фокусировки в этом случае может быть покрытие поверхности цилиндра слоем графена, в результате чего возникают плазмонные резонансы.

**Заключение.** Кусочно-однородная линза, состоящая из шести слоев, обеспечивает фокусировку, если ее радиус превышает длину волны в три раза и более. Способ аппроксимации непрерывной радиальной зависимости показателя преломления оказывает существенное влияние на эффект фокусировки. Наилучшие результаты дает аппроксимация с «избытком», при которой центр фокального пятна расположен ближе всего к задней стенке цилиндра. Если необходимо, чтобы радиус цилиндра был меньше или приблизительно равен длине волны, вместо линзы Люнеберга можно использовать однородный диэлектрический цилиндр, покрытый слоем графена, и работать на частотах плазмонных резонансов графена. Ил. 7. Библиогр.: 21 назв.

**Ключевые слова:** дифракция на круговом цилиндре, кусочно-однородная линза Люнеберга.

В задачах оптоэлектроники часто возникает необходимость сфокусировать электромагнитное излучение на задней стенке линзы. Такую проблему можно решить с помощью сферической или цилиндрической линзы Люнеберга [1].

Классическая линза Люнеберга представляет собой диэлектрический объект цилиндрической или сферической формы, показатель преломления которого изменяется по радиусу таким образом, чтобы все параллельные световые лучи фокусировались в точке, лежащей на ее задней стенке. Такая линза способна превра-

тить излучение всенаправленного источника, помещенного в ее фокусе, в узкий направленный луч. Показатель преломления такой линзы должен изменяться по следующему закону как функция расстояния  $r$  от центра сферической или, соответственно, оси цилиндрической линзы:

$$n(r) = \sqrt{\varepsilon(r)} = \sqrt{2 - (r/a)^2}.$$

Здесь  $\varepsilon(r)$  – относительная диэлектрическая проницаемость материала линзы;  $a$  – внешний радиус линзы, помещенной в вакуум,  $0 \leq r \leq a$ .

Исследование рассеяния света линзой Люнеберга и некоторых ее разновидностей представлено в работах [2–6].

На практике аналоги линзы Люнеберга используются, например, в СВЧ-антеннах [2] или в качестве объективов фотоаппаратов, встроенных в мобильные телефоны. Трудно создать среду, показатель преломления которой плавно изменяется по радиусу. Поэтому обычно линзы Люнеберга изготавливают в виде набора диэлектрических слоев с разным значением показателя преломления внутри каждого слоя. В литературе описаны линзы, состоящие из различного количества слоев. Так, например, в работе [7] показано, что 10 слоев достаточно для эмуляции непрерывного изменения показателя преломления, а в [8] утверждается, что вполне достаточно еще меньшего числа слоев – 5. При этом в качестве материалов слоев можно использовать различные стекла.

Классическое формальное решение задачи геометрической оптики для линзы Люнеберга основано на трех допущениях.

1. Длина волны предполагается малой: формально она равна нулю  $\lambda = 0$ , что позволяет использовать приближение геометрической оптики.

2. Рассматривается фокусировка скалярной, а не векторной волны, что, собственно, и позволяет решать одно и то же уравнение эйконала как для цилиндрической, так и сферической линзы.

3. Радиальные изменения коэффициента преломления описываются непрерывной функцией (1).

На практике невозможно выполнить все перечисленные условия. Если применение приближения геометрической оптики еще можно оправдать малой длиной волны, то два других допущения обосновать значительно труднее. Действительно, электромагнитные волны имеют векторную природу, поэтому решения для  $TE$  (магнитной) и  $TM$  (электрической) волн могут отличаться как друг от друга, так и от решения скалярной задачи. Кроме того, на практике непрерывную функцию  $n(r)$  заменяют слоистой средой с дискретным изменением показателя преломления. При этом, исходя из технологических соображений, желательно использовать как можно меньшее число слоев. Таким обра-

зом, возникает необходимость оценить, к каким изменениям приведет учет векторного характера поля электромагнитной волны при кусочно-однородной фокусирующей линзе.

Основной целью настоящей работы является моделирование дифракции плоской электромагнитной волны  $TE$ -поляризации на цилиндрической слоисто-неоднородной структуре из шести слоев, моделирующей линзу Люнеберга. В частности, исследовано пространственное распределение амплитуды поля вблизи такого объекта на различных частотах (при различном соотношении внешнего радиуса линзы и длины волны падающего излучения) для разных вариантов структуры слоев, близких к закону (1). Кроме того, проведено сравнение пространственного распределения амплитуды поля в такой линзе с распределением амплитуды поля, дифрагированного на *однородном* диэлектрическом цилиндре, покрытом слоем графена. Показано, что графеновое покрытие позволяет отказаться от слоистых диэлектриков и использовать однородные цилиндрические линзы для фокусировки падающей волны на задней стенке линзы.

При моделировании использовалось классическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечном диэлектрическом цилиндре. Как и в наших предыдущих работах, см. например [10], использовалось классическое разложение [9] по беселевым функциям комплексного аргумента, которые вычислялись с помощью библиотеки стандартных программ *IMSL* в среде программирования *Visual Fortran*.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим пространственное распределение амплитуды электромагнитного поля в случае падения плоской электромагнитной волны на многослойный круговой диэлектрический цилиндр бесконечной длины. Количество слоев  $N$  может быть любым, однако для своих расчетов мы выбрали  $N = 6$ . Линза с внешним радиусом  $a = 6$  мкм расположена в вакууме, а ее ось направлена вдоль оси  $Z$  цилиндрической системы координат (рис. 1). Вдоль оси  $X$ , справа налево, на линзу падает плоская монохроматическая радиоволна единичной амплитуды и частоты  $\omega$ . Используется временная зависимость вида  $e^{i\omega t}$ , поэтому падающая волна представ-

ляется в виде  $H_z^{inc} = e^{\gamma x + i\omega t}$ . Толщина слоев в линзе одинакова и равна  $d = 1$  мкм (рис. 2). При моделировании внутри каждого из однородных слоев использовалось представление искомого поля, зависящего от радиуса, с помощью линейной комбинации двух независимых цилиндрических функций комплексного аргумента: функций Неймана и Макдональда [9]. Потребовав выполнения условия непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границах слоев и условия излучения Зоммерфельда на бесконечности, мы получаем неоднородную систему  $2N$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд парциальных волн внутри однородных слоев. В правой части системы находятся коэффициенты разложения падающей плоской волны по цилиндрическим функциям [10].

Решив численно неоднородную линейную систему алгебраических уравнений относительно искомого амплитуд парциальных волн, мы можем рассчитать рассеянное и полное поле в произвольной точке пространства. Ниже представлены полученные распределения амплитуды полного поля внутри и вблизи линзы.

Для численного моделирования гладкой зависимости (1) необходимо использовать кусочно-линейную аппроксимацию параболы. В принципе, толщины слоев могут быть разными, однако мы будем рассматривать слои равной толщины, но разной оптической плотности. Такой вариант легче реализовать при изготовлении линзы. Коэффициент преломления слоев должен соответствовать параболической зависимости (1) линзы Люнеберга. Однако возникает вопрос, к какой именно точке параболы нужно отнести коэффициент преломления однородных слоев. Для моделирования гладкой зависимости показателя преломления материала линзы с помощью ступенчатой кусочно-непрерывной радиальной зависимости можно использовать одну из трех моделей, показанных на рис. 2. Численное значение показателя преломления внутри каждого слоя можно выбирать по-разному. Оно может быть равным либо его максимальному значению (определение с «избытком»), либо минимальному значению (определение с «недостатком»), либо его можно принять равным среднему между макси-

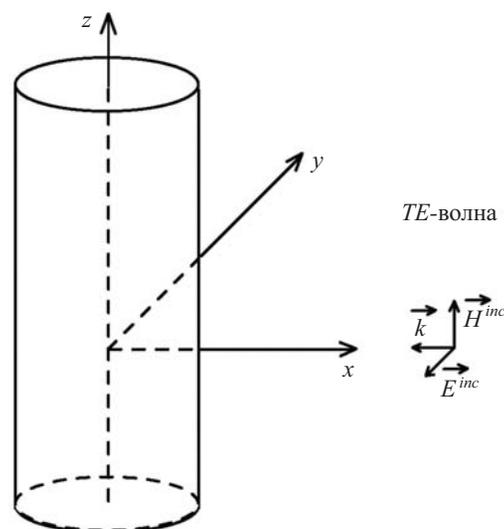


Рис. 1. Геометрия задачи

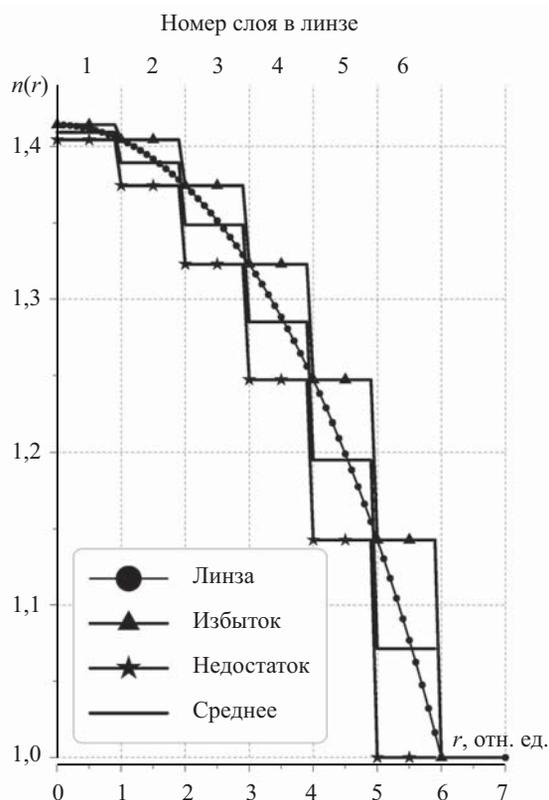


Рис. 2. Модельные зависимости показателя преломления линзы Люнеберга от расстояния до ее оси

мальным и минимальным значениями («среднее»). Все три варианта аппроксимации гладкой функции (1) ступенчатыми кривыми показаны на рис. 2.

Здесь линия с точками представляет собой непрерывную зависимость, рассчитанную по

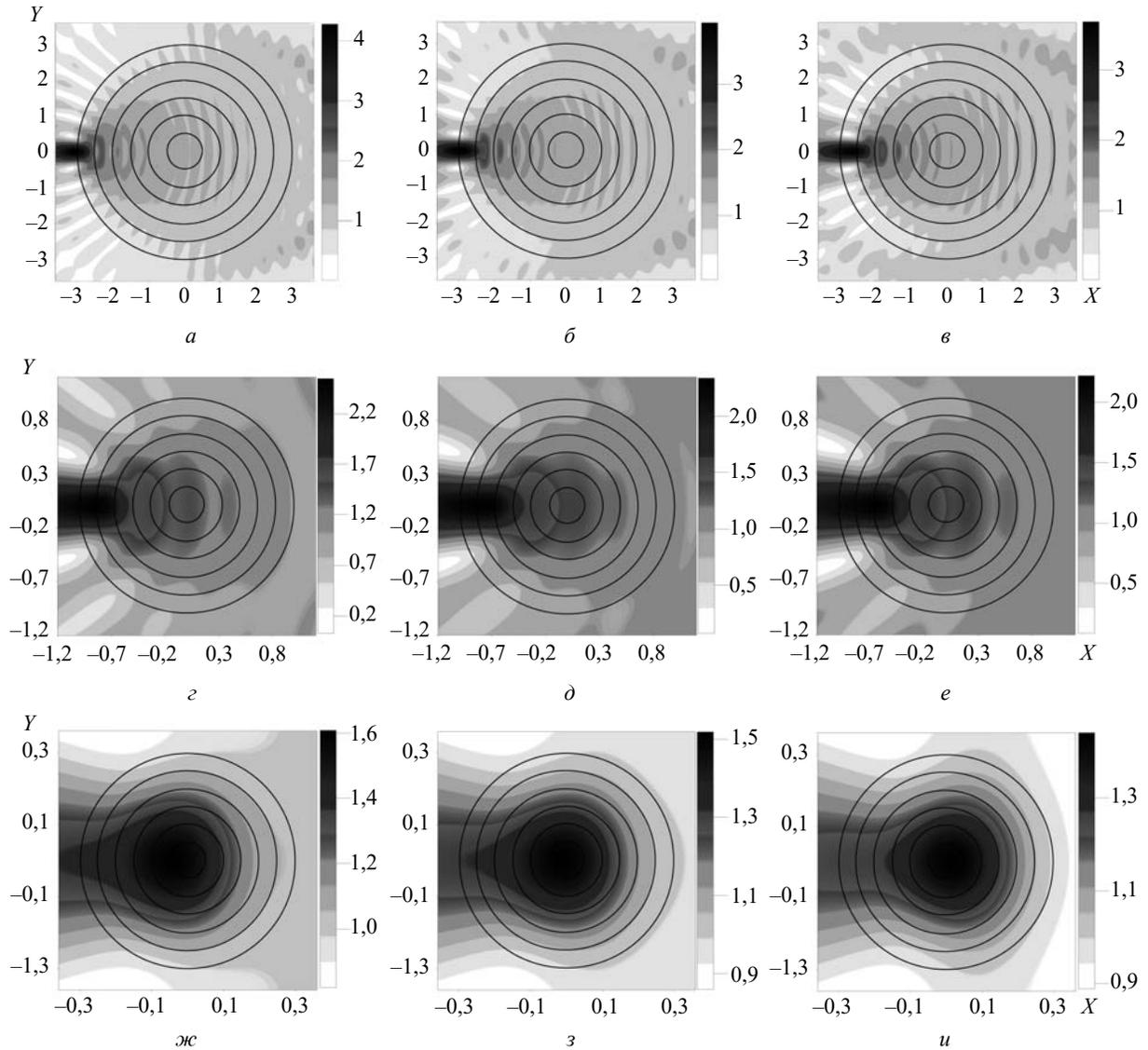


Рис. 3. Пространственное распределение амплитуды компоненты поля  $H_z$  для линзы Лунеберга при длине волны падающего излучения  $\lambda$

закону Лунеберга (1). Линия с треугольниками вершиной вверх соответствует аппроксимации с «избытком», линия с треугольниками вершиной вниз – аппроксимации с «недостатком», а штриховая линия – аппроксимация по «среднему».

Таким образом, в первом слое, в интервале  $0 < r < d$ , коэффициент преломления  $n(r) = \sqrt{\varepsilon(r)} = \sqrt{2 - (r/a)^2}$  принимает значения, равные  $n(r) = \sqrt{2} = 1,41$  для модели с «избытком»,  $n = 1,40$  в модели с «недостатком» и  $n = 1,409$  для аппроксимации по «среднему». Внутри второго слоя ( $d < r < 2d$ ) имеем  $n = 1,40$  для модели с «избытком»,  $n = 1,37$  для модели с

«недостатком» и  $n = 1,389$  при аппроксимации по «среднему». Аналогичным образом находят коэффициенты преломления всех шести слоев линзы.

## 2. Результаты численного моделирования.

На рис. 3 представлены результаты расчетов пространственного распределения амплитуды компоненты поля  $H_z$  в слоистой линзе Лунеберга для трех значений длины волны, равных 2, 6 и 20 мкм (1-я, 2-я и 3-я строки соответственно). В левой колонке представлены расчеты для модели с «избытком», в средней – для аппроксимации зависимости коэффициента преломления по «среднему», в правой – для модели с «недостатком». Внешняя окру-

ность соответствует внешнему радиусу линзы Люнеберга  $a = 6$  мкм. Внутренние окружности обозначают границы слоев линзы. Расчет выполнен в безразмерных относительных координатах  $X/\lambda$  и  $Y/\lambda$ , которые на рисунках обозначены символами  $X$ ,  $Y$ . Безразмерные координаты будут использованы в дальнейшем на всех рисунках.

Амплитуда поля приведена в оттенках серого в соответствии со шкалой, приведенной справа от каждого рисунка. Как видно из трех нижних графиков (рис. 3,  $ж-и$ ), на низкой частоте ( $a = 0,3\lambda$ ) максимум поля находится почти в центре линзы, размер фокусного пятна составляет примерно  $0,26 \times 0,22$  в безразмерных величинах, приведенных по осям, или  $5,2 \times 4,4$  мкм в абсолютных значениях. Размеры пятна определялись на уровне 90 % от максимума для всех графиков рис. 3. С ростом частоты (рис. 3,  $г-е$ ) фокальное пятно смещается к задней стенке линзы. В этом случае, при  $a = \lambda$ , размер фокального пятна примерно равен  $0,75 \times 0,3$  в безразмерных величинах или  $4,5 \times 1,8$  мкм. На высоких частотах, при  $a = 3\lambda$  (рис. 3,  $а-в$ ), максимум поля находится вблизи задней стенки цилиндра, его размер приблизительно равен  $0,6 \times 0,2$  в безразмерных величинах или  $1,2 \times 0,4$  мкм. Очевидно, что фокальное пятно возникает наиболее близко к стенке цилиндра (практически располагается на ней) при аппроксимации с «избытком». При аппроксимации с «недостатком» и по «среднему» фокальное пятно смещается к центру цилиндра. Из графиков видно, что при  $\lambda > a$  (рис. 3,  $ж-и$ ) моделируемая линза ведет себя совсем не так, как линза Люнеберга, поскольку фокусировки поля в этом случае не наблюдается. Однако при  $\lambda < a$  (рис. 3,  $а-в$ ) линза уже ведет себя подобно линзе Люнеберга, фокусируя падающее излучение на поверхности цилиндра. Также видно, что за поверхностью линзы фокальное пятно образует своеобразный хвост или «факел». В фотонике подобное явление называют «фотонным наноджетом». Этот термин появился в научной литературе еще в 2000 году и в настоящее время широко используется при анализе разнообразных фотонных приборов [11–21]. Шести слоев вполне достаточно чтобы заменить среду с плавно изменяющимся показателем преломления кусочно-однородной сло-

истой средой. При этом для обеспечения фокусировки необходимо, чтобы радиус цилиндра превышал длину волны в три раза и более. Фокусировка излучения при использовании подобной линзы Люнеберга возможна в разных местах, как на поверхности линзы, так и внутри нее, что может быть полезным для практических применений.

### 3. Фокусировка в линзах малого размера.

Как было показано выше, фокусировка падающей электромагнитной волны вблизи поверхности цилиндрической линзы Люнеберга возникает тогда, когда ее радиус в несколько раз превосходит длину волны. Линза радиусом 6 мкм будет эффективно фокусировать как оптические волны, так и радиоизлучение терагерцевого диапазона с частотами выше 50 ТГц.

В работе [21], где рассматривалось влияние графенового покрытия на распределение поля вокруг диэлектрического цилиндра или трубки, тоже был обнаружен эффект фокусировки. Подобные объекты, благодаря своим фокусирующим свойствам, могут заменить линзу Люнеберга, если требуется, чтобы размер линзы был меньше длины волны. Эффект фокусировки в этом случае обеспечивается благодаря плазмонным резонансам, связанным с поверхностными волнами, которые распространяются вдоль замкнутого цилиндрического слоя графена. Резонансные частоты составляют около 1 ТГц, если цилиндрическая графеновая оболочка имеет радиус от единиц до десятков микрон.

Сначала рассмотрим диэлектрический цилиндр радиуса  $a = 60$  мкм со слоем графена. Расчеты будем проводить для комнатной температуры  $T = 300$  К, при которой химический потенциал графена равен  $\mu_c = 0,25$  эВ. Для того чтобы выяснить, где расположены резонансы, связанные со слоем графена, построим зависимости сечения рассеяния и поглощения от частоты для диэлектрического цилиндра со слоем графена и без него. Результаты таких расчетов представлены на рис. 4. Как видно из графиков сечений рассеяния (рис. 4,  $а$ ), у диэлектрического цилиндра со слоем графена существуют три типа резонансов: широкие, связанные с интерференцией волн, преломленных ближней (относительно источника облучения) и отраженных от дальней поверхности цилиндра; узкие, периодически повторяющиеся пики,

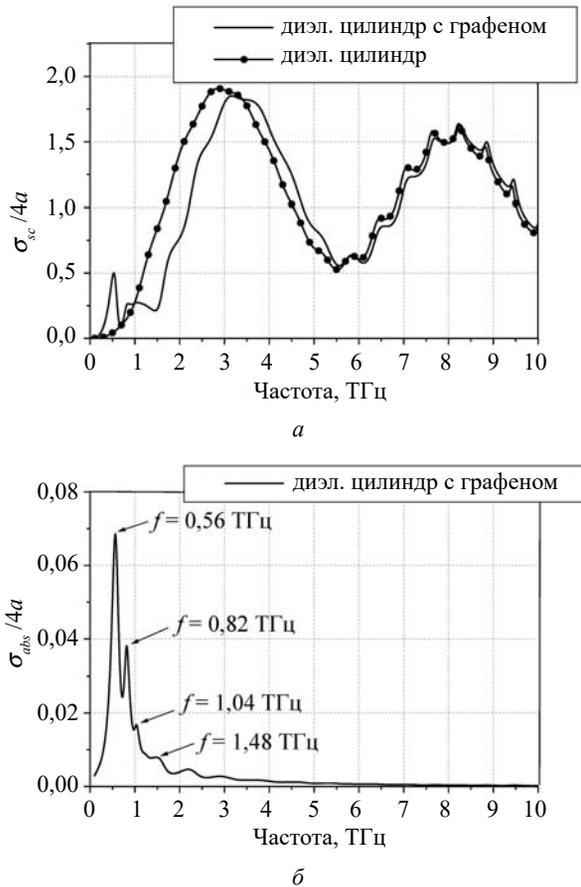


Рис. 4. Графики зависимости нормированных сечений рассеяния (а) и поглощения (б) от частоты для диэлектрического цилиндра радиусом  $a = 60$  мкм с графеновым покрытием ( $n = 1,5$ )

подобные резонансам типа «шепчущей галереи»; резонансы в области низких частот, связанные с наличием слоя графена. Нас будет интересовать именно этот последний тип резонансов, обусловленный возникновением поверхностной плазмонной волны. В расчетах предполагалось, что потери в диэлектрике отсутствуют. Поэтому в дальнейшем будем использовать данные графиков сечения поглощения (рис. 4, б), так как наблюдаемые резонансы связаны только с плазмонами.

На рис. 5 представлены результаты расчетов пространственного распределения амплитуды компоненты поля  $|H_z|$  для диэлектрического цилиндра со слоем графена (1-я колонка), диэлектрического цилиндра без графена (2-я колонка) и слоистой линзы Люнеберга при аппроксимации с «избытком» (3-я колонка) на первых трех частотах плазмонных резонансов, отмеченных на рис. 4, б. Графики 1-й колонки демонстри-

руют резонансы, соответствующие локализованным поверхностным плазмонам 1-го, 2-го и 3-го порядков (дипольному, квадрупольному и гексапольному). Из графиков 2-й и 3-й колонки видно, что, когда структура без графенового покрытия мала по сравнению с длиной волны (при заданных параметрах  $\lambda \approx 9a$ ), никакой фокусировки у поверхности не происходит, и она не может рассматриваться как линза Люнеберга. Однако, как следует из графиков 1-й колонки, при таком же соотношении длины волны и радиуса диэлектрического цилиндра, покрытого слоем графена, наблюдается концентрация излучения вблизи дальней поверхности структуры. С уменьшением частоты фокальное пятно увеличивается в размерах и смещается к центру цилиндра для всех рассмотренных структур. Коэффициент усиления при заданных параметрах диэлектрического цилиндра со слоем графена («графеновой линзы») может достигать 3.

У читателя может возникнуть резонный вопрос: мы рассматривали слоистую линзу Люнеберга с радиусом  $a = 6$  мкм и отметили, что она может успешно работать на длинах волн короче 2 мкм. В то же время свойства «графеновой линзы» на рис. 4 и 5 демонстрируются при радиусе  $a = 60$  мкм.

Обратимся к ситуации, когда радиус диэлектрического цилиндра, покрытого слоем графена, равен 6 мкм, а длина волны электромагнитного излучения, которое необходимо сфокусировать, намного превосходит эту величину. Повторив вычисления для такой линзы, получим сечения рассеяния и поглощения, показанные на рис. 6. Очевидно, что уменьшение радиуса линзы привело к уменьшению числа плазмонных резонансов до двух, наблюдаемых на частотах 2,02 и 2,9 ТГц. Пространственные распределения амплитуды поля для цилиндра с  $a = 6$  мкм приведены на рис. 7. В целом, они похожи на распределения, представленные на рис. 5, хотя в данном случае имеют место только дипольный и квадрупольный плазмонные резонансы, а гексапольный резонанс в системе уменьшенного размера отсутствует.

При уменьшении диаметра фокусирующего цилиндра на порядок длина волны падающего поля, на которой происходит его фокусировка, уменьшается не в десять, а всего лишь в два-три

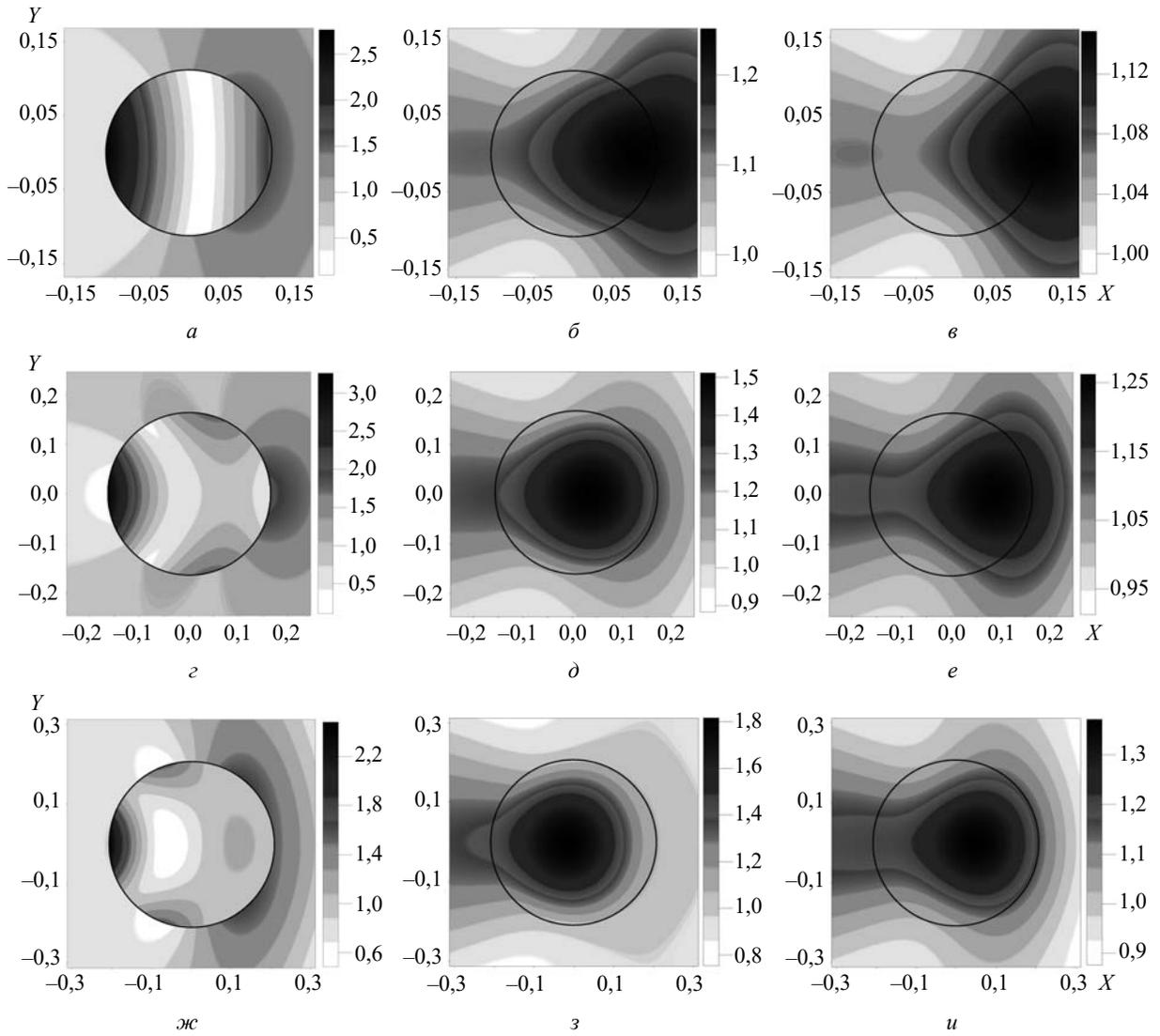


Рис. 5. Пространственное распределение компоненты поля  $|H_v|$  для диэлектрического цилиндра со слоем графена (а, з, ж), цилиндра без графена (б, д, з) и аппроксимированной с «избытком» модели линзы Люнеберга (в, е, и) на частотах падающего излучения  $f = 0,56$  ТГц (а-в),  $f = 0,82$  ТГц (з-е) и  $f = 1,04$  ТГц (ж-и)

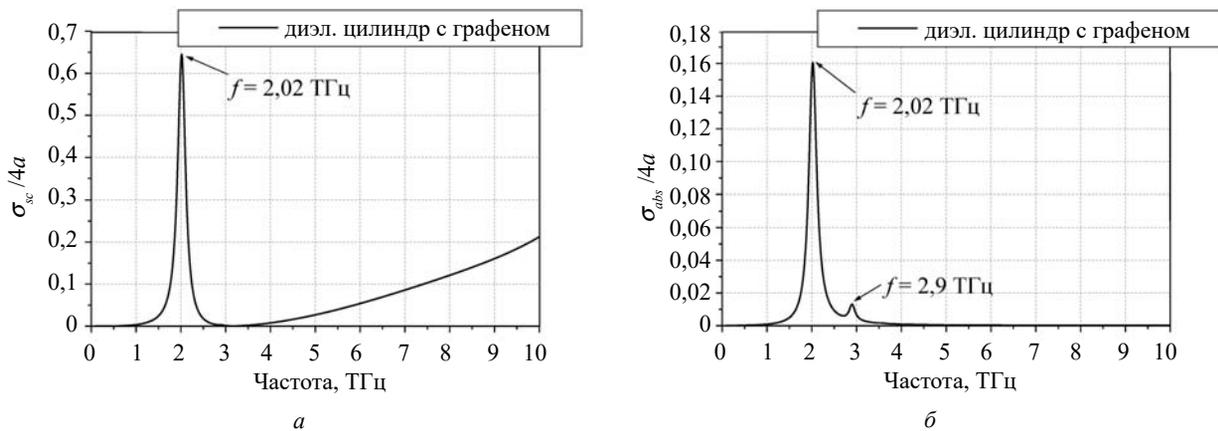
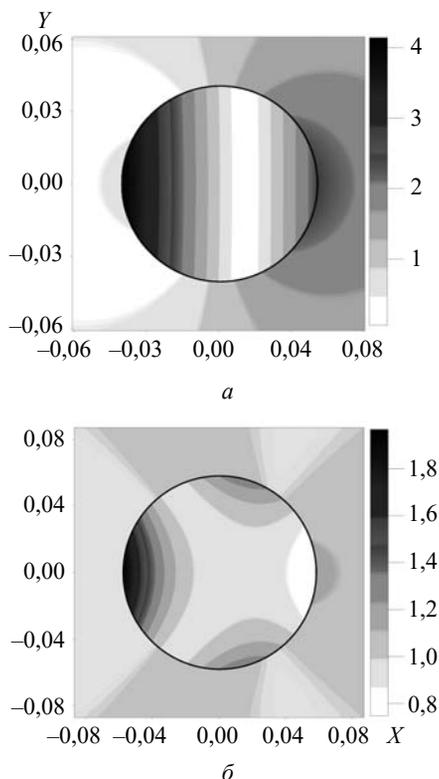


Рис. 6. Графики зависимости нормированных сечений рассеяния (а) и поглощения (б) от частоты для диэлектрического цилиндра радиусом  $a = 6$  мкм с графеновым покрытием ( $n = 1,5$ )



**Рис. 7.** Пространственное распределение компоненты поля  $|H_z|$  для диэлектрического цилиндра со слоем графена на частотах падающего излучения  $f = 2,02$  ТГц (а) и  $f = 2,9$  ТГц (б)

раза. Иными словами, если на рис. 7 длина волны падающего электромагнитного излучения превосходит радиус линзы в 20–30 раз, то на рис. 5 это отношение равно  $\sim 10$ . Тем не менее, и в том, и в другом случае у дальней относительно источника падающего излучения поверхности линзы образуется максимум поля.

Очевидно, что «графеновая линза» действительно способна концентрировать поле на своей поверхности даже в том случае, когда ее размер намного меньше длины волны падающего излучения. Для этого необходимо, чтобы в графеновой оболочке на заданной частоте возник плазмонный резонанс того или иного типа.

**Выводы.** С помощью численного моделирования получены пространственные распределения амплитуды поля при рассеянии плоской электромагнитной волны на цилиндрической слоисто-неоднородной линзе из шести слоев, моделирующей линзу Лüneберга. Эти данные сопоставлены с распределениями поля для од-

нородного диэлектрического цилиндра, покрытого слоем графена («графеновой линзы»). Перечислим основные результаты работы.

- Линза Лüneберга может быть успешно промоделирована слоистой средой с дискретным изменением показателя преломления. При этом вполне достаточно использовать шесть слоев, что важно для практических применений.

- Большинство предыдущих исследований фокусирующих свойств линзы Лüneберга проводилось в приближении геометрической оптики, когда  $\lambda \rightarrow 0$ . Наши вычисления показали, что это условие можно считать выполненным уже при соотношении внешнего радиуса цилиндрической линзы к длине волны падающего излучения, равным или больше 3. При этом размер фокального пятна, нормированный на внешний радиус цилиндра, составляет  $0,6 \times 0,2$ , а коэффициент усиления (фактор фокусировки) может достигать 4.

- Способ аппроксимации необходимой радиальной зависимости показателя преломления играет определенную роль при моделировании. Наилучший результат, когда фокальное пятно попадает на поверхность цилиндра, дает аппроксимация с «избытком». При аппроксимациях с «недостатком» и по «среднему» фокальное пятно смещается внутрь линзы. «Факел» при этом ослабевает, но полностью не исчезает.

- При размерах линзы  $a \leq \lambda$  фокусировка у задней стенки линзы отсутствует. Для концентрации излучения в этом случае предложено использовать однородный диэлектрический цилиндр, покрытый слоем графена. При этом работать такая линза будет на частотах плазмонных резонансов графена. Тогда, по мере перехода на частоты дипольного, квадрупольного и октупольного резонансов, можно постепенно «сжимать» размер фокального пятна вблизи поверхности линзы. Коэффициент усиления линзы при этом оказывается порядка 3 (по амплитуде), т. е. около 10 дБ.

*Авторы считают приятным долгом поблагодарить доктора физ.-мат. наук В.Г. Галушко и кандидата физ.-мат. наук А.В. Бровенко за полезные замечания и предложения, позволившие улучшить текст статьи.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. Изд. 2-е испр. Пер. с англ. Москва: Наука, 1973. 720 с.
2. Gordon J.M. Spherical graded-index lenses as perfect imaging and maximum power transfer devices. *Appl. Opt.* 2000. Vol. 39, Iss. 22. P. 3825–3832. DOI: <https://doi.org/10.1364/ao.39.003825>.
3. Lock J.A. Scattering of an electromagnetic plane wave by a Luneburg lens. I. Ray theory. *J. Opt. Soc. Am.* 2008. Vol. 25, Iss. 12. P. 2971–2979. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.25.002971>.
4. Lock J.A. Scattering of an electromagnetic plane wave by a Luneburg lens. II. Wave theory. *J. Opt. Soc. Am.* 2008. Vol. 25, Iss. 12. P. 2980–2990. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.25.002980>.
5. Lock J.A. Scattering of an electromagnetic plane wave by a Luneburg lens. III. Finely stratified sphere model. *J. Opt. Soc. Am.* 2008. Vol. 25, Iss. 12. P. 2991–3000. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.25.002991>.
6. Boriskin A.V., Nosich A.I. Whispering-gallery and Luneburg-lens effects in a beam-fed circularly layered dielectric cylinder. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2002. Vol. 50, Iss. 9. P. 1245–1249. DOI: [10.1109/tap.2002.801270](https://doi.org/10.1109/tap.2002.801270).
7. Wang M., Huang C., Pu M.-B., Hu C.-G., Pan W.-B., Zhao Z.-Y., & Luo X.-G. Electric-controlled scanning Luneburg lens based on metamaterials. *Appl. Phys. A* 2013. Vol. 111, Iss. 2. P. 445–450. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00339-013-7603-9>.
8. Kong S.-C., Taflove A. & Backman V. Quasi one-dimensional light beam generated by a graded-index microsphere. *Opt. Express*. 2009. Vol. 17, Iss. 5. P. 3722–3731. DOI: [10.1364/oe.18.003722](https://doi.org/10.1364/oe.18.003722).
9. Wait J.R. *Introduction to antennas and propagation*. London: Peter Peregrinus Ltd, 1986. 256 p.
10. Величко Е.А., Николаенко А.П. Моделирование рассеяния плоской электромагнитной волны на цилиндре из диэлектрика. *Радиофизика и электроника*. 2010. Т. 1(15), № 3. С. 17–24.
11. Chen Z., Taflove A. & Backman V. Photonic nanojet enhancement of backscattering of light by nanoparticles: a potential novel visible-light ultramicroscopy technique. *Opt. Express*. 2004. Vol. 12, Iss. 7. P. 1214–1220. DOI: <https://doi.org/10.1364/opex.12.001214>.
12. Li X., Chen Z., Taflove A. & Backman V. Optical analysis of nanoparticles via enhanced backscattering facilitated by 3-D photonic nanojets. *Opt. Express*. 2005. Vol. 13, Iss. 2. P. 526–533. DOI: <https://doi.org/10.1364/opex.13.00526>.
13. Ferrand P., Wenger J., Devilez A., Pianta M., Stout B., N. Bonod, Popov E. and Rigneault H. Direct imaging of photonic nanojets. *Opt. Express*. 2008. Vol. 16, Iss. 10. P. 6930–6940. DOI: <https://doi.org/10.1364/oe.16.006930>.
14. Wu W., Katsnelson A., Mernis O.G., and Mohseni H. A deep sub-wavelength process for the formation of highly uniform arrays of nanoholes and nanopillars. *Nanotechnology*. 2007. Vol. 18, Iss. 48. P. 485302(4 p.). DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0957-4484/18/48/485302>.
15. Heifetz A., Simpson J.J., Kong S.-C., Taflove A. and Backman V. Subdiffraction optical resolution of a gold nanosphere located within the nanojet of a Mie-resonant dielectric microsphere. *Opt. Express*. 2007. Vol. 15, Iss. 25. P. 17334–17342. DOI: <https://doi.org/10.1364/oe.15.017334>.
16. Gerlach M., Rakovich Y.P. & Donegan J.F. Nanojets and directional emission in symmetric photonic molecules. *Opt. Express*. 2007. Vol. 15, Iss. 25. P. 17343–17350. DOI: <https://doi.org/10.1364/oe.15.017343>.
17. Kong S.-C., Sahakian A.V., Heifetz A., Taflove A., & Backman V. Robust detection of deeply subwavelength pits in simulated optical data-storage disks using photonic jets. *Appl. Phys. Lett.* 2008. Vol. 92, Iss. 21. P. 21102(3 p.). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2936993>.
18. Yang S. & Astratov V.N. Photonic nanojet-induced modes in chains of size-disordered microspheres with attenuation of 0.08 dB per sphere. *Appl. Phys. Lett.* 2008. Vol. 92, Iss. 26. P. 261111. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2954013>.
19. McLeod E. & Arnold C.B. Subwavelength direct-write nanopatterning using optically trapped microspheres. *Nat. Nanotech.* 2008. Vol. 3, Iss. 7. P. 413–417. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/nnano.2008.150>.
20. Kapitonov A.M. & Astratov V.N. Observation of nanojet-induced modes with small propagation losses in chains of coupled spherical cavities. *Opt. Lett.* 2007. Vol. 32, Iss. 4. P. 409–411. DOI: <https://doi.org/10.1364/ol.32.000409>.
21. Velichko E.A. Evaluation of a graphene covered dielectric microtube as a refractive-index sensor in the THz range. *IOP J. Optics*. 2016. Vol. 18, Iss. 3. P. 035008(11 p.). DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/2040-8978/18/3/035008>.

Стаття надійшла 29.11.2018

REFERENCES

1. Born, M., Wolf, E., 1973. *Principles of Optics*. 2<sup>nd</sup> ed. corr. Translated from English. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
2. Gordon, J.M., 2000. Spherical graded-index lenses as perfect imaging and maximum power transfer devices. *Appl. Opt.*, **39**(22), pp. 3825–3832. DOI: <https://doi.org/10.1364/ao.39.003825>.
3. Lock, J.A., 2008. Scattering of an electromagnetic plane wave by a Luneburg lens. I. Ray theory. *J. Opt. Soc. Am.*, **25**(12), pp. 2971–2979. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.25.002971>.
4. Lock, J.A., 2008. Scattering of an electromagnetic plane wave by a Luneburg lens. II. Wave theory. *J. Opt. Soc. Am.*, **25**(12), pp. 2980–2990. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.25.002980>.
5. Lock, J.A., 2008. Scattering of an electromagnetic plane wave by a Luneburg lens. III. Finely stratified sphere model. *J. Opt. Soc. Am.*, **25**(12), pp. 2991–3000. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.25.002991>.
6. Boriskin, A.V., Nosich, A.I., 2002. Whispering-gallery and Luneburg-lens effects in a beam-fed circularly layered dielectric cylinder. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **50**(9), pp. 1245–1249. DOI: [10.1109/tap.2002.801270](https://doi.org/10.1109/tap.2002.801270).

7. Wang, M., Huang, C., Pu, M.-B., Hu, C.-G., Pan, W.-B., Zhao, Z.-Y. & Luo, X.-G., 2013. Electric-controlled scanning Luneburg lens based on metamaterials. *Appl. Phys. A*, **111**(2), pp. 445–450. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00339-013-7603-9>.
8. Kong, S.-C., Taflove, A. & Backman, V., 2009. Quasi one-dimensional light beam generated by a graded-index microsphere. *Opt. Express*, **17**(5), pp. 3722–3731. DOI: [10.1364/oe.18.003722](https://doi.org/10.1364/oe.18.003722).
9. Wait, J.R., 1986. *Introduction to antennas and propagation*. London: Peter Peregrinus Ltd.
10. Velichko, E.A., Nickolaenko, A.P., 2010. Modeling of plane electromagnetic wave scattering by a dielectric cylinder. *Radiofizika i elektronika*, **1**(15)(3), pp. 17–24 (in Russian).
11. Chen, Z., Taflove, A. & Backman, V., 2004. Photonic nanojet enhancement of backscattering of light by nanoparticles: a potential novel visible-light ultramicroscopy technique. *Opt. Express*, **12**(7), pp. 1214–1220. DOI: <https://doi.org/10.1364/opex.12.001214>.
12. Li, X., Chen, Z., Taflove, A. & Backman, V., 2005. Optical analysis of nanoparticles via enhanced backscattering facilitated by 3-D photonic nanojets. *Opt. Express*, **13**(2), pp. 526–533. DOI: <https://doi.org/10.1364/opex.13.00526>.
13. Ferrand, P., Wenger, J., Devilez, A., Pianta, M., Stout, B., Bonod, N., Popov, E. and Rigneault, H., 2008. Direct imaging of photonic nanojets. *Opt. Express*, **16**(10), pp. 6930–6940. DOI: <https://doi.org/10.1364/oe.16.006930>.
14. Wu, W., Katsnelson, A., Mernis, O.G. and Mohseni, H., 2007. A deep sub-wavelength process for the formation of highly uniform arrays of nanoholes and nanopillars. *Nanotechnology*, **18**(48), 485302(4 pp.). DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0957-4484/18/48/485302>.
15. Heifetz, A., Simpson, J.J., Kong, S.-C., Taflove, A. & Backman, V., 2007. Subdiffraction optical resolution of a gold nanosphere located within the nanojet of a Mie-resonant dielectric microsphere. *Opt. Express*, **15**(25), pp. 17334–17342. DOI: <https://doi.org/10.1364/oe.15.017334>.
16. Gerlach, M., Rakovich, Y.P. & Donegan, J.F., 2007. Nanojets and directional emission in symmetric photonic molecules. *Opt. Express*, **15**(25), pp. 17343–17350. DOI: <https://doi.org/10.1364/oe.15.017343>.
17. Kong, S.-C., Sahakian, A.V., Heifetz, A., Taflove, A. & Backman, V., 2008. Robust detection of deeply subwavelength pits in simulated optical data-storage disks using photonic jets. *Appl. Phys. Lett.*, **92**(21), 21102(3 pp.). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2936993>.
18. Yang, S. & Astratov, V.N., 2008. Photonic nanojet-induced modes in chains of size-disordered microspheres with attenuation of 0.08 dB per sphere. *Appl. Phys. Lett.*, **92**(26), pp. 261111. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2954013>.
19. McLeod, E. & Arnold, C.B., 2008. Subwavelength direct-write nanopatterning using optically trapped microspheres. *Nat. Nanotech.*, **3**(7), pp. 413–417. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/nnano.2008.150>.
20. Kapitonov, A.M. & Astratov, V.N., 2007. Observation of nanojet-induced modes with small propagation losses in chains of coupled spherical cavities. *Opt. Lett.*, **32**(4), pp. 409–411. DOI: <https://doi.org/10.1364/ol.32.000409>.
21. Velichko, E.A., 2016. Evaluation of a graphene covered dielectric microtube as a refractive-index sensor in the THz range. *IOP J. Opt.*, **18**(3), 035008(11 pp.). DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/2040-8978/18/3/035008>.

Received 29.11.2018

E.A. Velichko, A.P. Nickolaenko

O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of the NAS of Ukraine  
12, Acad. Proskura st., Kharkov, 61085, Ukraine

#### SCATTERING OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY A PIECEWISE HOMOGENEOUS LUNEBERG LENS

**Subject and purpose.** The results of studies of the physical effects arising in the scattering of a plane electromagnetic wave on a piecewise homogeneous multilayered lens simulating a Luneberg lens, as well as in scattering on a dielectric cylinder with a graphene coating are presented. The purpose of the paper is to estimate the size of the focal spot and the range of frequencies in which focusing is observed due to plasmon resonance phenomenon.

**Methods and methodology.** A numerical simulation was performed of the diffraction of a plane *TE*-wave on a cylindrical piecewise homogeneous Luneberg lens of six layers, as well as on a dielectric cylinder coated by a graphene layer. The exact classical solution of the boundary value problem was used. Specific feature of our approach is application of Bessel functions of the complex argument. For the case of a graphene coating, the resistive boundary conditions were applied with the conductivity of graphene is determined by the Kubo formula.

**Results.** The spatial distribution of the field amplitude was analyzed for different sizes of the outer radius of the lens measured in the wavelength of the incident radiation. It was shown that if the radius of the lens is smaller than the wavelength, focusing at the rear wall of the cylinder is not possible, but applying a layer of graphene can solve this problem due to arising plasmon resonances.

**Conclusion.** A piecewise homogeneous lens consisting of six layers provides focusing when its radius exceeds the wavelength by the factor of 3 or more. The method of approximation of the continuous radial dependence of the refractive index plays a significant role in focusing. The best results are obtained in approximation with an «excess», when the center of the focal spot is closest to the rear wall of cylinder. When it is required that the radius of the cylinder is smaller or of the order of the wavelength, instead of the Luneberg lens, a uniform dielectric cylinder coated with a graphene layer might be used and operate at plasmon resonance frequencies of graphene.

**Key words:** diffraction by a circular cylinder, piecewise homogeneous Luneberg lens.

*О.А. Величко, О.П. Николаєнко*

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України  
12, вул. Акад. Проскури, Харків, 61085, Україна

#### РОЗСІЯННЯ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЮ ЛІНЗОЮ ЛЮНЕБЕРГА

**Предмет і мета роботи.** У статті розглянуті ефекти, що виникають при розсіюванні плоскої електромагнітної хвилі на кусково-однорідній циліндричній лінзі Люнеберга а також діелектричному циліндрі з графеновим покриттям. Метою роботи є оцінка розмірів фокальної плями і діапазону частот, в якому спостерігається фокусування завдяки явищу плазмонного резонанса.

**Методи і методологія.** Проведено чисельне моделювання дифракції плоскої  $TE$ -хвилі на циліндричній кусково-однорідній лінзі Люнеберга з шести шарів, а також на однорідному діелектричному циліндрі, покритому шаром графена. Застосовано точне класичне розв'язання граничної задачі. Особливістю розгляду є використання функцій Бесселя комплексного аргументу. Для випадку графенового покриття застосовувались резистивні граничні умови, коли провідність графена визначається за формулою Кубо.

**Результати роботи.** Проведено аналіз просторового розподілу амплітуди поля при різних співвідношеннях зовнішнього радіуса лінзи і довжини хвилі падаючого випромінювання. Показано, що якщо радіус лінзи менше довжини хвилі, фокусування на задній стінці циліндра неможливе. Одним із способів забезпечення фокусування в цьому випадку може бути покриття поверхні циліндра шаром графена, в результаті чого виникають плазмонні резонанси.

**Висновки.** Кусково-однорідна лінза, що складається з шести шарів, забезпечує фокусування, якщо її радіус перевищує довжину хвилі в три рази і більше. Спосіб апроксимації безперервної радіальної залежності показника заломлення має суттєвий вплив на ефект фокусування. Найкращі результати дає апроксимація з «надлишком», при якій центр фокальної плями розташований найближче до задньої стінки циліндра. Якщо необхідно, щоб радіус циліндра був менше або приблизно дорівнював довжині хвилі, замість лінзи Люнеберга можна використовувати однорідний діелектричний циліндр, покритий шаром графена, і працювати на частотах плазмонних резонансів графена.

**Ключові слова:** дифракція на круговому циліндрі, кусочно-однорідна лінза Люнеберга.