

## **А.С. Брюховецький, О.В. Вічкань**

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України

12, вул. Акад. Проскури, Харків, 61085, Україна

E-mail: bryu@ire.kharkov.ua

# **Функція Гріна імпульсного джерела звуку у рівномірному дозвуковому потоці**

**Предмет і мета роботи.** Теоретично досліджується хвильове поле, яке створене просторово-часовим розподілом джерел звуку в рівномірному дозвуковому потоці. Мета роботи – отримання аналітичної залежності звукового поля від фізичних параметрів.

**Методи і методологія роботи.** Використовується просторово-хвильовіне фур'є-розкладання звукового поля при розв'язанні задачі Коші для хвильового рівняння в рухомому середовищі. Визначено фур'є-зображення функції Гріна імпульсного точкового джерела звуку, обернене перетворення якого дозволяє отримати її просторово-часове уявлення.

**Результати роботи.** Хвильове поле джерел довільного вигляду за допомогою отриманої функції Гріна подано як «хвильовий потенціал», який є інтегралом типу згортки щільності просторово-часового розподілу джерел звуку і функції Гріна.

**Висновок.** Результати розрахунків дають чітке уявлення про поширення звукових хвиль, що збуджуються точковим імпульсним джерелом в однорідному рівномірному потоці. Хвильовий фронт звукового поля зображується сферою, центр якої зміщується від точкового імпульсного джерела зі швидкістю потоку у напрямку його руху, а радіус сфери збільшується в часі зі швидкістю звуку. Отримана функція Гріна допускає аналітичне продовження на випадок надзвукового потоку. На відміну від випадку дозвукового потоку, таке продовження задовольняє принципу причинності не в усьому необмеженому просторі, а лише у точках спостереження, локалізованих всередині конуса Маха. Хвильове поле монохроматичного джерела отримується відповідним граничним переходом у розв'язанні для імпульсу прямокутної форми. Л. 3. Бібліогр.: 9 назв.

**Ключові слова:** фур'є-розкладання, принцип причинності, співвідношення повноти, співвідношення ортогональності, запізнювання, характеристична поверхня, хвильовий потенціал, конус Маха.

Рух середовища приводить до анізотропії поширення звукових хвиль, у результаті чого просторово-кутовий розподіл звукового поля, що збуджується джерелом, може значно відрізнятися від такого в нерухомому середовищі.

Наявні розрахунки звукового поля в однорідному потоці присвячені, в основному, розв'язанню хвильового рівняння для сталих монохроматичних коливань (наприклад, [1–3]). Проте в [1] допущені неточності в розрахунках, на що було вказано в [2, с. 102]. Системний характер цих неточностей встановлений у [3].

Розв'язання в загальній постановці задачі Коші про звукове поле немонохроматичного дже-

рела в рівномірному потоці у відомій нам літературі відсутнє, а тому заслуговує теоретичного розгляду. Проведення такого дослідження необхідне, зокрема, для більш точного теоретичного опису акустичного хвильового поля в методі радіоакустичного зондування [4–6].

**1. Постановка задачі та її розв'язання.** Метою дослідження є визначення хвильової функції (потенціалу швидкості)  $\psi(\vec{r}, t)$ , що є розв'язком рівняння ([1], с. 35; [2], с. 47)

$$L \psi(\vec{r}, t) = Q(\vec{r}, t) \quad (1)$$

за умови  $\psi(\vec{r}, t) = 0$  для  $t < t'$  (принцип причинності).

Тут  $Q(\vec{r}, t)$  – джерело маси (джерело об’ємної швидкості), тожтожно рівне нулеві за умови  $t < t'$ ;  $\vec{r} = (x, y, z)$  – радіус-вектор точки спостереження;  $t$  – час;  $L$  – хвильовий оператор в однорідному рівномірному потоці

$$L = \frac{1}{c_a^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla \right)^2 - \Delta, \quad (2)$$

де  $c_a$  – швидкість звуку;  $\vec{v}$  – швидкість потоку;  $\nabla$  – оператор Гамільтона;  $\Delta$  – лапласіан.

Особлива роль у реалізації поставленої мети належить функції Гріна  $G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t')$  – розв’язку задачі для імпульсного точкового джерела, що розташоване в точці  $\vec{r}'$  і діє в момент часу  $t'$

$$Q(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'). \quad (3)$$

У лінійному, однорідному, стаціонарному, безмежному просторі поле інваріантне щодо просторово-часових зсувів і, отже, може бути зображене суперпозицією плоских хвиль вигляду  $\exp[i(\vec{K}\vec{r} - \Omega t)]$  [7, с. 54]). Характерною особливістю такого розкладу є алгебризація диференціальних операторів

$$\nabla \equiv i\vec{K}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\Omega,$$

і завдання знаходження функції Гріна зводиться до алгебричної задачі визначення амплітуди фур’є-розкладу [7, с. 55–56] та подальшого обчислення чотирикратного (у загальному випадку) осцилюючого інтеграла для визначення просторово-часового уявлення функції Гріна.

Процедуру обчислень можна значно спростити, якщо з самого початку враховувати властивості симетрії розв’язання в часі або щодо просторових координат [7, с. 72]. Для цієї задачі таким спрощенням може бути просторово-хвилевидне розкладання, яке є «дуже зручним для розгляду полів у середовищах, однорідних уздовж однієї з просторових осей, наприклад осі  $z$ » [7, с. 89]. В однорідних областях, поперечний переріз яких, нормальний до осі  $z$ , необмежений і описується радіус-вектором  $\vec{r}_\perp$ , хвильову інтегровну функцію  $\psi(\vec{r}, t)$ , можна подати у вигляді потрійного інтеграла Фур’є:

$$\psi(\vec{r}_\perp, t; z) = \iiint \tilde{\psi}(\vec{K}_\perp, \Omega; z) \times e^{i(\vec{K}_\perp \vec{r}_\perp - \Omega t)} \frac{d\vec{K}_\perp d\Omega}{(2\pi)^3}, \quad (4)$$

де

$$\tilde{\psi}(\vec{K}_\perp, \Omega; z) = \iiint \psi(\vec{r}_\perp, t; z) \times e^{-i(\vec{K}_\perp \vec{r}_\perp - \Omega t)} d\vec{r}_\perp dt, \quad (5)$$

причому  $d\vec{K}_\perp d\Omega$  – елемент об’єму в просторі зображень  $\vec{K}_\perp, \Omega$ ;  $d\vec{r}_\perp dt$  – елемент об’єму в просторі оригіналів  $\vec{r}_\perp, t$ ;  $\vec{K}_\perp$  – складова хвильового вектора, перпендикулярна щодо осі  $z$ . Співвідношення повноти, яке еквівалентне прямому та оберненому перетворенням Фур’є (4) і (5), має вигляд

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') = \iiint e^{i\vec{K}_\perp(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp)} \times e^{-i\Omega(t-t')} \frac{d\vec{K}_\perp d\Omega}{(2\pi)^3}, \quad (6)$$

де інтегрування поширюється на всі дійсні хвильові числа  $\vec{K}_\perp$  і частоти  $\Omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ .

З перетворення Фур’є (4), (5) випливає і співвідношення ортогональності [7, с. 90]:

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{K}_\perp - \vec{K}'_\perp) \delta(\Omega - \Omega') = \iiint e^{-i(\vec{K}_\perp - \vec{K}'_\perp)\vec{r}_\perp} e^{i(\Omega - \Omega')t} d\vec{r}_\perp dt. \quad (7)$$

Функція Гріна в тому ж базисі, що і (6), зображується розкладанням

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \iiint \tilde{G}(\vec{K}_\perp, \Omega; z, z') \times e^{i\vec{K}_\perp(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp) - i\Omega(t-t')} \frac{d\vec{K}_\perp d\Omega}{(2\pi)^3}. \quad (8)$$

Підстановка розкладань (6) і (8) у хвильове рівняння (1) приводить до рівняння для визначення амплітуди фур’є-розкладу  $\tilde{G}(\vec{K}_\perp, \Omega; z, z')$

$$\tilde{L}\tilde{G} \equiv \tilde{a}_0 \tilde{G}'' + \tilde{a}_1 \tilde{G}' + \tilde{a}_2 \tilde{G} = \delta(z - z'), \quad (9)$$

$$\text{де } \tilde{G}' = \frac{d}{dz} \tilde{G}(\vec{K}_\perp, \Omega; z, z'),$$

$$\tilde{G}'' = \frac{d^2}{dz^2} \tilde{G}(\vec{K}_\perp, \Omega; z, z'),$$

а коефіцієнти рівняння (9)

$$\tilde{a}_0 = -(1 - M_z^2),$$

$$\tilde{a}_1 = -i2M_z(K - \vec{K}_\perp \vec{M}_\perp), \quad (10)$$

$$\tilde{a}_2 = -\left[ K^2 - 2K(\vec{K}_\perp \vec{M}_\perp) + (\vec{K}_\perp \vec{M}_\perp)^2 - K_\perp^2 \right].$$

У цих формулах використані позначення  $K = \Omega / c_a$ ,  $\vec{M} = (\vec{M}_\perp, M_z) = \vec{v} / c_a$ ,  $\vec{v} = (v_\perp, v_z)$ .

Для монохроматичних звукових коливань, що встановилися ( $\Omega = \Omega_0$ ), процедуру розв'язання рівняння (9) вже було розглянуто [3, формули (9)–(16)]. Формальна відмінність від проведеного там розгляду полягає в заміні знаків обох частин рівності (9) на протилежні.

Для наведеного рівняння, тобто рівняння (9) з нульовою правою частиною, фундаментальна система розв'язків  $e^{q_\alpha z}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) визначається коренями характеристичного рівняння

$$\tilde{a}_0 q_\alpha^2 + \tilde{a}_1 q_\alpha + \tilde{a}_2 = 0, \quad (\alpha = 1, 2), \quad (11)$$

звідки

$$q_{1,2} = \left[ -\tilde{a}_1 \pm \sqrt{\tilde{a}_1^2 - 4\tilde{a}_0\tilde{a}_2} \right] / 2\tilde{a}_0 = \left[ a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} \right] / 2a_0. \quad (12)$$

У цій формулі  $(a_0, a_1, a_2) = -(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$  – відповідні коефіцієнтам в роботі [3].

З цієї причини значення коренів  $q_{1,2}$  (з точністю до вибору нумерації 1, 2) збігаються зі значеннями  $q_{1,2}$  з формули (11) в [3] з урахуванням того, що в цьому випадку  $K = \Omega / c_a$ , а не  $\Omega_0 / c_a$ .

Для спрощення подальших обчислень оберемо напрямки осей  $x$  і  $y$  таким чином, щоб вектор швидкості потоку  $\vec{v}$  лежав у площині  $(xz)$ , при цьому  $\vec{v}_\perp = (v_x, 0)$ ,  $\vec{M}_\perp = (M_x, 0)$ .

Тоді характеристичні корені можна записати так:

$$q_{1,2} = \Delta q \pm iK_z / (1 - M_z^2), \quad (13)$$

де

$$\Delta q = -iM_z(K - K_x M_x) / (1 - M_z^2); \quad (14)$$

$$K_z = \sqrt{K^2 - 2KM_x K_x - (1 - M^2)K_x^2 - (1 - M_z^2)K_y^2}. \quad (15)$$

Знак «плюс» відповідає в (13) індексу «1», а знак «мінус» – індексу «2».

Вираз  $\tilde{G}(\vec{K}_\perp, \Omega; z, z')$  з використанням цих позначень може бути записаний в єдиному вигляді для  $z > z'$  та  $z < z'$ :

$$\tilde{G}(\vec{K}_\perp, \Omega; z, z') = \frac{i}{2K_z} \times \exp\left\{ \Delta q(z - z') + i|z - z'|K_z / (1 - M_z^2) \right\}, \quad (16)$$

28

де враховано, що

$$1 / (1 - M_z^2)(q_2 - q_1) = i / 2K_z. \quad (17)$$

Обернене перетворення Фур'є дає просторово-часове зображення функції Гріна

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \iiint (i / 2K_z) \times \exp\left[ i\Phi(\vec{K}_\perp, \Omega) \right] \frac{d\vec{K}_\perp d\Omega}{(2\pi)^3}, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{K}_\perp, \Omega) &= -\Omega t_1 + \Phi(\vec{K}_\perp) \equiv \\ &\equiv -\Omega t_1 + \vec{K}_\perp \vec{r}_\perp - \frac{M_z K_z z_1}{1 - M_z^2} + \\ &+ K_x \frac{M_x M_z}{1 - M_z^2} z_1 + \frac{K_z}{1 - M_z^2} |z_1|, \end{aligned} \quad (19)$$

і для скорочення введені позначення  $t_1 = t - t'$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Виділимо у формулі (18) інтегрування за  $d\vec{K}_\perp = dK_x dK_y$ :

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp(-i\Omega t_1) d\Omega \times \iint dK_x dK_y g(\vec{K}_\perp) \exp\left[ i\Phi(\vec{K}_\perp) \right], \quad (20)$$

де

$$g(\vec{K}_\perp) = -1 / 4\pi i K_z. \quad (21)$$

Зробимо заміну змінних інтегрування  $K_x, K_y \rightarrow \tilde{K}_x, \tilde{K}_y$  відповідно до формул

$$K_x = \tilde{K}_x \sqrt{1 - M_z^2} / (1 - M^2) - KM_x / (1 - M^2); \quad (22)$$

$$K_y = \tilde{K}_y / \sqrt{1 - M^2}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} K_z &= \sqrt{K^2 - \tilde{K}_x^2 - \tilde{K}_y^2} \sqrt{1 - M_z^2} / \sqrt{1 - M^2} \equiv \\ &\equiv \tilde{K}_z \sqrt{1 - M_z^2} / \sqrt{1 - M^2} \end{aligned} \quad (24)$$

і введемо позначення  $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1 \sqrt{1 - M_z^2} / (1 - M^2)$ ,

$$\hat{x}_1 = x_1 + \frac{M_x M_z}{1 - M_z^2} z_1, \quad \tilde{y}_1 = y_1 / \sqrt{1 - M^2},$$

$$\tilde{z}_1 = z_1 / \sqrt{(1 - M^2)(1 - M_z^2)}.$$

У результаті цих перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{K}_\perp) &= -K \frac{M_x x_1 + M_z z_1}{1 - M^2} + \\ &+ \tilde{K}_x \tilde{x}_1 + \tilde{K}_y \tilde{y}_1 + \tilde{K}_z |\tilde{z}_1|; \end{aligned} \quad (25)$$

$$g(\vec{K}_\perp) = -\frac{1}{4\pi i} \sqrt{\frac{1-M^2}{1-M_z^2}} \frac{1}{\vec{K}_z}; \quad (26)$$

$$dK_x dK_y = \sqrt{\frac{1-M_z^2}{(1-M^2)^3}} d\tilde{K}_x d\tilde{K}_y. \quad (27)$$

Подвійний інтеграл за  $d\vec{K}_\perp$  у формулі (20) набуде вигляду

$$I_2 = \frac{i}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(1-M^2)} \times \exp\left[-iK \frac{M_x x_1 + M_z z_1}{1-M^2}\right] \tilde{I}_2, \quad (28)$$

де, згідно з [8, с. 55, формула (126)],

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \iint d\tilde{K}_x d\tilde{K}_y \left(1 / \sqrt{K^2 - \tilde{K}_x^2 - \tilde{K}_y^2}\right) \times \\ &\times \exp\left\{i\tilde{K}_x \tilde{x}_1 + i\tilde{K}_y \tilde{y}_1 + i\sqrt{K^2 - \tilde{K}_x^2 - \tilde{K}_y^2} |\tilde{z}_1|\right\} = \\ &= \frac{i2\pi}{\tilde{r}_1} e^{iK \tilde{r}_1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Тут

$$\tilde{r}_1 = \sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{y}_1^2 + \tilde{z}_1^2} = \hat{r}_1 / \sqrt{1-M^2}, \quad (30)$$

$$\hat{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \sqrt{(1-M_z^2)x_1^2 + (1-M^2)y_1^2 + (1-M_x^2)z_1^2 + 2M_x M_z x_1 z_1}. \quad (30a)$$

У підсумку отримаємо для  $I_2$  значення

$$I_2 = \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{\tilde{r}_1(1-M^2)} \times \exp\left\{-iK \frac{M_x x_1 + M_z z_1}{1-M^2} + iK \tilde{r}_1\right\}, \quad (31)$$

підстановка якого до (20) приводить до такого результату:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') &= \int d\Omega e^{-i\Omega(t-t')} I_2 = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \frac{1}{\hat{r}_1} \int d\Omega e^{-i\Omega(t-t'-\tau)}, \end{aligned} \quad (32)$$

де «запізнення»  $\tau = \tau(\vec{r}, \vec{r}', \vec{M})$  дорівнює

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{c_a} \times \\ &\times \left\{ -(M_x x_1 + M_z z_1) / (1-M^2) + \hat{r}_1 / \sqrt{1-M^2} \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

У процесі отримання (32) і (33) було враховано, що  $K = \Omega / c_a$ .

З огляду на те, що інтеграл в (32) є помноження на  $2\pi$  зображення розкладання Фур'є для  $\delta$ -функції, отримуємо

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\hat{r}_1 \sqrt{1-M^2}} \delta(t-t'-\tau). \quad (34)$$

Покажемо, що «запізнення»  $\tau$  у досліджуваному випадку дозвукового потоку ( $1-M^2 > 0$ ) є позитивно визначеною величиною для всіх  $\vec{r}, \vec{r}'$ . Для цього необхідно, щоб виконувалася умова

$$\hat{r} \sqrt{1-M^2} \geq M_x x_1 + M_z z_1,$$

або, зводячи у квадрат обидві частини нерівності і підставивши явний вигляд  $\hat{r}_1$ , з урахуванням рівності  $1-M_x^2 - M_z^2 \equiv 1-M^2 > 0$  приходимо до вимоги  $(1-M^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \geq 0$ , яка виконується для будь-яких  $\vec{r}, \vec{r}'$ .

З формули (34) випливає, що відмінні від нуля значення функції Гріна можливі, якщо  $t-t'-\tau=0$  або  $t=t'+\tau>t'$ . За умови  $t < t'$  аргумент  $t-t' < 0$ , що призводить до нульових значень функції Гріна («принцип причинності»).

## 2. Граничні випадки умов задачі.

*Непорушне середовище.* Внаслідок  $\vec{v} = 0$  маємо  $\vec{M} = 0$ . У цьому випадку  $\hat{r}_1 = r_1 = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , і формула (34) збігається з формулою (156) на с. 22 та формулою (7) на с. 57 в роботі [7]:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left[t-t'-|\vec{r} - \vec{r}'|/c_a\right]. \end{aligned} \quad (35)$$

*Вектор швидкості потоку  $\vec{v}$  паралельний осі  $x$ , тобто  $\vec{M} = (M, 0, 0)$ .* Для цього випадку маємо

$$\hat{r}_1 = \sqrt{x_1^2 / (1-M^2) + y_1^2 + z_1^2},$$

$$\tau = \frac{1}{c_a} \left[ -M_x x_1 / \sqrt{1-M^2} + \hat{r}_1 \right] / \sqrt{1-M^2}.$$

Перейдемо в цих формулах до позначень, що були використані в роботі [1, с. 37, 38]:

$$t_1 = t - t' \rightarrow t, \quad M \rightarrow \beta, \quad \hat{r}_1 \rightarrow R^*, \quad \tau \rightarrow R / c.$$

Формула (34) в цих позначеннях виглядає так:

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{R^*} \delta(t - R/c). \quad (36)$$

У роботі [1] формули (1.91) і (1.96) для збіжного розв'язку мають вигляд:

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \frac{1}{R^*} \delta(t + R/c). \quad (37)$$

Порівняння вказує на відсутність множників  $\frac{1}{4\pi}$  і  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  з причин, що обговорювалися в роботі про монохроматичне джерело звуку [3].

**3. Загальний випадок неточкового джерела.** У загальному випадку, коли  $Q$  не є добуток  $\delta$ -функцій (3), розв'язок рівняння (1) дається «хвильовим потенціалом»

$$\psi(\vec{r}, t) = \iiint d\vec{r}' \int dt' G(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') Q(\vec{r}', t'). \quad (38)$$

Дійсно, підстановка (38) в ліву частину хвильового рівняння (1) з урахуванням розкладання (8) приводить до виразу

$$\begin{aligned} L\left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(\vec{r}, t) &= \iiint d\vec{r}' \int dt' \iiint \frac{d\vec{K}_\perp d\Omega}{(2\pi)^3} \tilde{L}\tilde{G} \times \\ &\times \exp\left[i\vec{K}_\perp(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp) - i\Omega(t - t')\right] Q(\vec{r}', t') = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d\vec{r}' \int dt' \delta(z - z')(2\pi)^2 \times \\ &\times \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp) 2\pi \delta(t - t') Q(\vec{r}', t') = Q(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (39)$$

Для отримання (39) були прийняті до уваги рівність (9) і співвідношення повноти (6).

Підставляючи (34) у «хвильовий потенціал» (38), можна привести його до вигляду:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-M^2}} \iiint d\vec{r}' \frac{1}{\hat{r}_1} Q(\vec{r}', t - \tau). \quad (40)$$

Для точкового джерела з залежністю від часу  $f(t)$

$$Q(\vec{r}', t') = f(t') \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0). \quad (41)$$

Формула (40) після інтегрування за  $d\vec{r}'$  приводить до результату

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-M^2}} \frac{1}{\hat{r}_{10}} f(t - \tau_0), \quad (42)$$

де  $\hat{r}_{10} = \hat{r}_1|_{\vec{r}'=\vec{r}_0}$ ,  $\tau_0 = \tau(\vec{r}, \vec{r}'; \vec{M})|_{\vec{r}'=\vec{r}_0}$ .

Для монохроматичного імпульсу прямокутної форми тривалістю  $\Delta t$  з несучою частотою  $\Omega_0$   $f(t') = e^{-i\Omega_0 t'} U(t' - t'_0) U(t'_0 + \Delta t - t')$  отримуємо

$$\begin{aligned} f(t - \tau_0) &= e^{-i\Omega_0(t - \tau_0)} U(t - \tau_0 - t'_0) \times \\ &\times U(t'_0 + \Delta t - t + \tau_0). \end{aligned} \quad (43)$$

Тут  $U(t)$  – одинична ступінчаста функція Хевісайда,  $t = t'_0 + \tau_0$  – момент часу приходу з точки  $\vec{r}_0$  в точку  $\vec{r}$  переднього хвильового фронту, а  $t = t'_0 + \Delta t + \tau_0$  – заднього.

Для  $t'_0 + \tau_0 < t < t'_0 + \tau_0 + \Delta t$  добуток функцій Хевісайда у формулі (43) дорівнює одиниці, і ця формула приводить до результату

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-M^2}} \frac{1}{\hat{r}_{10}} e^{-i\Omega_0(t - \tau_0)}, \quad (44)$$

який (з точністю до знака джерела) збігається, маючи на увазі  $\tau_0$  з (33), зі значенням  $\psi(\vec{r}, t)$ , що надається формулою (62) в [3] для порушуваних монохроматичним джерелом усталених звукових коливань.

Точки спостереження  $\vec{r}$ , до яких випромінює в момент часу  $t'$  коливання надходить із запізненням  $\tau(\vec{r}, \vec{r}', \vec{M})$ , утворюють поверхню, рівняння якої в момент часу спостереження  $t$  визначається нулями  $\delta$ -функції в (34):

$$\chi = t - t' - \tau(\vec{r}, \vec{r}', \vec{M}) = 0. \quad (45)$$

Вигляд цієї поверхні легко встановити в разі спеціального вибору системи координат, напрямком осі  $z$  якої збігається з напрямком  $\vec{M}$ , тобто з напрямком  $\vec{v}$ . У цьому випадку  $\vec{M} = (0, 0, M)$  і (45) записуються таким чином:

$$\chi = t - t' - \frac{1}{c_a} \left[ -\frac{M z_1}{1 - M^2} + \frac{\hat{r}_1}{\sqrt{1 - M^2}} \right] = 0, \quad (46)$$

де  $\hat{r}_1 = \sqrt{\frac{z_1^2}{1 - M^2} + x_1^2 + y_1^2}$ .

Якщо початок відліку системи координат збігається з джерелом ( $\vec{r}' = 0$ ), то  $\vec{r}_1 = \vec{r}$ .

У результаті елементарних перетворень (46) отримуємо

$$(z - z_c)^2 + r_\perp^2 = c_a^2 \tilde{t}^2, \quad (47)$$

де  $\tilde{t} = t - t'$  – різниця моментів часу спостереження і випромінювання коливання, а  $z_c = M c_a \tilde{t} \equiv v \tilde{t}$ .

Вочевидь, що поверхня (47) є сферою з радіусом  $r_a = c_a \tilde{t}$ , центр якої зміщений від початку координат по осі  $z$  в точку  $\vec{r}_c = \vec{v} \tilde{t}$ . Ця поверхня є «хвильовим фронтом», тобто характеристичною поверхнею. У цьому легко переконатися, обчисливши похідні  $\chi$  за змінними  $t, x, y, z$  і підставивши їх у відповідне диференціальне рівняння [9, с. 547, 550]. Напрямок нормалі  $\vec{n}$  в кожній точці  $\vec{r} = (x, y, z)$  в кожен момент часу збігається з напрямком радіуса сфери, який з'єднує точки  $\vec{r}_c$  і  $\vec{r}$ , тому  $\vec{r} = \vec{r}_c + r_a \vec{n} \equiv (\vec{v} + c_a \vec{n}) \tilde{t}$ .

За визначенням у роботі [9, с. 554],  $\frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{v} + c_a \vec{n}) \equiv \vec{u}$  є вектором швидкості в напрямку променя, а його складова у напрямку нормалі  $\vec{n}$ ,  $(\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{n} = ((\vec{v} \cdot \vec{n}) + c_a) \vec{n}$  – вектором хвильової швидкості фронту рухомої хвилі. Для поля монохроматичного джерела у [2, с. 61, формули (3.32) і (3.31) відповідно] аналогічні величини визначені як групова і фазова швидкості.

Для безрозмірного значення (47)  $r_0 = r / c_a \tilde{t}$  можна записати у вигляді

$$r_0^2 - 2M r_0 \cos \theta + M^2 - 1 = 0, \quad (48)$$

де  $\theta$  – кут між віссю  $z$  і  $\vec{r}$ . З виразу (48) випливає, що  $r_0 = r_0(\theta)$  є поверхнею обертання навколо осі  $z$ :

$$\begin{aligned} r_0 &= r_0(\theta) = M \cos \theta \pm \\ &\pm \sqrt{M^2 \cos^2 \theta + 1 - M^2} \equiv \\ &\equiv M \cos \theta \pm \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (49)$$

За умови  $1 - M^2 > 0$  фізично реалізоване значення  $r_0 > 0$  виходить лише при виборі верхнього знака. Якщо (49) аналітично продовжити на значення  $1 - M^2 < 0$ , тобто  $v > c_a$ , то за умови

$$1 - M^2 \sin^2 \theta > 0 \quad (50)$$

фізично реалізованими є обидва значення кореня. У цьому випадку запізнення  $\tau = r/c_a \equiv r_0 \tilde{t} > 0$  відповідає двом значенням часу поширення  $\tilde{t} = t - t'$ . Умова (50) означає, що у випадку  $M > 1$  напрямки вектора  $\vec{r}$  для точок спостереження лежать усередині конуса Маха:

$$\theta \leq \arcsin \frac{1}{M} < \pi / 2. \quad (51)$$

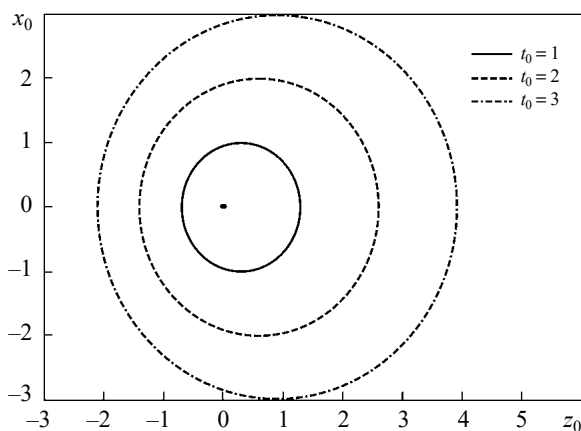


Рис. 1. Перетин поверхні запізнювання в площині  $x_0, z_0$  за умови  $M = 0,3$  і  $t_0 = 1, 2, 3$

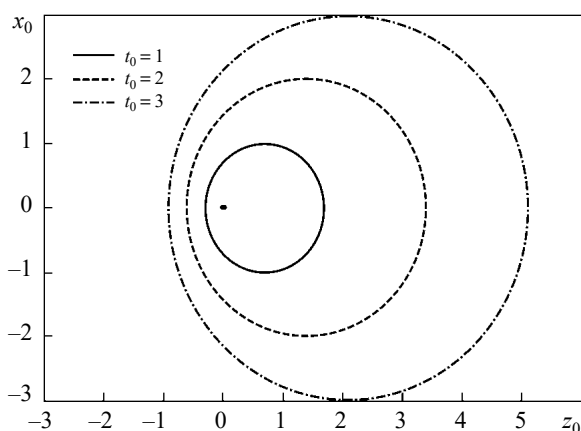


Рис. 2. Перетин поверхні запізнювання в площині  $x_0, z_0$  за умови  $M = 0,7$  і  $t_0 = 1, 2, 3$

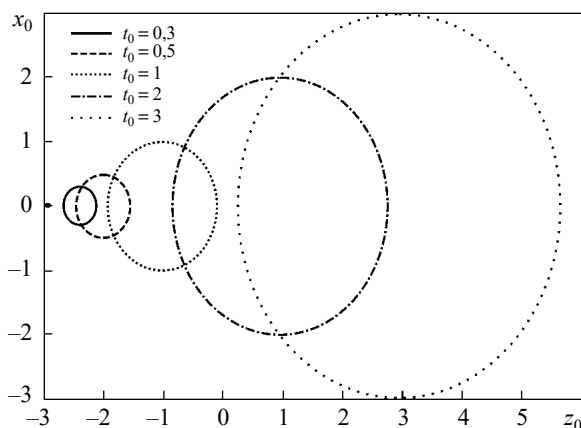


Рис. 3. Перетин поверхні запізнювання в площині  $x_0, z_0$  за умови  $M = 2,2$  і  $t_0 = 0,3; 0,5; 1; 2; 3$

Дійсно, застосування принципу Галілея [2, с. 99] до розв'язання задачі про рухоме джерело звуку в нерухомому середовищі [1, с. 134; 2, с. 146] вказує на можливість спостереження в

одній точці двох коливань з різним запізнюванням  $\tilde{t}_1$  і  $\tilde{t}_2$ . Вважаючи  $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2$ , легко показати, що таке спостереження можливе за умови додержання нерівності

$$(M - 1) / (M + 1) < (\tilde{t}_1 / \tilde{t}_2) < 1.$$

На жаль, використовувана схема розрахунків не допускає застосування в розрахункових формулах з самого початку значень  $M > 1$ , а тому строге обґрунтування того, що формула (34) визначає розв'язок цієї задачі для точок спостереження всередині конуса Маха, вимагає, певно, залучення методів аналізу з теорії узагальнених функцій.

Розрахункові криві на рис. 1–3 (див. с. 31) наочно ілюструють динаміку поведінки поверхні запізнювання  $r_0 = r_0(\theta)$  в перетині площиною  $(x, z)$  для кількох значень числа Маха  $M$  і часу запізнювання  $t_1$ .

Дані наведені для безрозмірних значень  $r_0 = r / c_a \tilde{t}$ ,  $x_0 = x / c_a \tilde{t}$ ,  $z_0 = z / c_a \tilde{t}$ ,  $t_0 = t_1 / \tilde{t}$ , де  $\tilde{t}$  – деяке «еталонне» значення, прийняте за одиницю. Точкою на рис. 1–3 вказано положення імпульсного джерела звуку на початку координат.

#### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Блохинцев Д.И. *Акустика неоднородной движущейся среды*. Москва–Ленинград: ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. 220 с.
2. Остафьев В.Е. *Распространение звука в движущихся средах*. Москва: Наука, 1992. 208 с.
3. Брюховецький А.С., Вічкань А.В. Волновое поле акустической антенны в равномерном дозвуковом потоке. *Радиофизика и электроника*. 2019. Т. 24, № 3. С. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.15407/rej2019.03.009>.
4. Ульянов Ю.Н., Ветров В.И., Максимова Н.Г. Радиоакустическое ветровое зондирование атмосферного пограничного слоя: история развития и перспективы. *Вестник ХНУ*. 2007. Сер. Радиофизика и электроника. Вып. 11. С. 27–32.
5. Панченко Ю.А., Слипченко К.И., Лю Чан. О допустимых упрощениях в дифракционной задаче на нижней границе бистатического РАЗ. *Радиоэлектроника и информатика*. 2011. № 2(53). С. 8–11.
6. Бабкин С.И., Кушнир М. К. Оценка влияния горизонтального ветра на амплитудную структуру сигналов системы радиоакустического зондирования атмосферы. *Радиотехника: межвед. науч.-техн. сб. ХНУРЕ*. Харьков, 2013. Вып. 175. С. 114–119.
7. Фелсен Л., Маркувиц Н. *Излучение и рассеяние волн*. Пер. с англ. под ред. М.Л. Левина. Т. 1. Москва: Мир, 1978. 547 с.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. *Излучение и рассеяние волн*. Пер. с англ. под ред. М.Л. Левина. Т. 2. Москва: Мир, 1978. 555 с.
9. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. Пер. с англ. Т.Д. Вентцель. Москва: Мир, 1964. 830 с.

Стаття надійшла 25.11.2019

#### REFERENCES

1. Blokhintsev, D.I., 1946. *Acoustics of an inhomogeneous moving medium*. Moscow-Leningrad: OGIz-Gostekhizdat Publ. (in Russian).
2. Ostashev, V.E., 1992. *Propagation of sound in moving media*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
3. Bryukhovetski, A.S. and Vichkan', A.V., 2019. Wave Field of Acoustic Antenna in Uniform Subsonic Flow. *Radiofiz. Elektron.*, **24**(3), pp. 9–20 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15407/rej2019.03.009>.
4. Ulyanov, Y.N., Vetrov, V.I., Maksimova, N.G., 2007. Radio-acoustic wind sounding of the atmospheric boundary layer: development history and prospects. *Vestnik of KhNU – Radiophysics and Electronics*, 11, pp. 27–32 (in Russian).
5. Panchenko, Y.A., Slipchenko, K.I., Lyu, Chan, 2011. On admissible simplifications in a diffraction problem at the lower boundary of a bistatic RAS. *Radioelektronika i informatika*, 2(53), pp. 8–11 (in Russian).

6. Babkin, C.I., Kushnir, M.K., 2013. Assessment of the effect of horizontal wind on the amplitude structure of the signals of the radio-acoustic sounding system of the atmosphere. In: *Radiotekhnika*. Kharkov: NURE Publ. 175, pp. 114–119 (in Russian).
7. Felsen, L.B., Markuvitz, N., 1978. *Radiation and Scattering of waves*. Translated from English and ed. by M.L. Levin. Vol. 1. Moscow: Mir Publ. (in Russian).
8. Felsen, L.B., Markuvitz, N., 1978. *Radiation and Scattering of waves*. Translated from English and ed. by M.L. Levin. Vol. 2. Moscow: Mir Publ. (in Russian).
9. Courant, R., 1964. *Partial differential equations*. Translated from English by T.D. Venttsel'. Moscow: Mir Publ. (in Russian).

Received 25.11.2019

A.S. Bryukhovetski, A.V. Vichkan'

O.Ya. Usikov IRE of NASU

12, Acad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

#### GREEN'S FUNCTION OF A PULSE SOUND SOURCE IN A UNIFORM SUBSONIC FLOW

**Subject and Purpose.** The wave field produced by a spatial-temporal distribution of sound sources in a uniform subsonic flow is theoretically studied in an effort to obtain an analytical dependence of the sound field on physical parameters.

**Method and Methodology.** Cauchy problem for wave equation in a moving medium is solved using a spatial-waveguide Fourier expansion of the sound field. A Fourier representation of the Green's function of a point-like pulse sound source is constructed whose inverse transform allows us to obtain the Green's function spatial-temporary representation.

**Results.** With the Green's function obtained, the wave fields from arbitrarily shaped sources have been represented in the "wave potential" form, which is a convolution type integral of the density of spatial-temporal distribution of the sound sources and the Green's function.

**Conclusion.** The calculation results give a clear idea of the propagation of sound waves excited by a point-like pulse source in a uniform homogeneous flow. The wave front of the sound field represents a sphere whose center "drifts" from the source at a speed equal to the speed of the flow in its movement direction, and the radius of the sphere grows in the course of time at a speed equal to the speed of sound. The obtained Green's function allows for the analytic continuation to the supersonic flow case that, in contrast to the subsonic case, satisfies the causality principle not in all unlimited space but only at the observation points within the Mach cone.

The wave field from a monochromatic source is the limiting case of the rectangular pulse solution.

**Key words:** *Fourier expansion, causality principle, completeness relation, orthogonality relation, delay, characteristic surface, wave potential, Mach cone.*